

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR
ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Sylvie LEDERER

1^{re} THÈSE. — Le formalisme lagrangien et son application aux théories minkowskiennes de la gravitation et de l'électromagnétisme.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 8 mai 1964 devant la Commission d'examen.

M. LICHNEROWICZ	<i>Président.</i>
M ^{mes} TONNELAT CHOQUET	<i>Examineurs.</i>

Editions de la *Revue d'Optique théorique et instrumentale*

3 et 5, boulevard Pasteur — 165, rue de Sèvres

PARIS (15^e)

1964



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552205_0075

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

Nom du Candidat : LEDERER

Prénom : Sylvie

Date de la soutenance : 8 mai 1964

Numéro d'ordre : Série A, 4282, N° 5133

1

LEDERER (Sylvie). — Le formalisme lagrangien et son application aux théories minkowskiennes de la gravitation et de l'électromagnétisme.

Th. Sc. Math. Paris, 1964, Série A, 4282, N° 5133.

2

LEDERER (Sylvie). — Le formalisme lagrangien et son application aux théories minkowskiennes de la gravitation et de l'électromagnétisme.

Th. Sc. Math. Paris, 1964, Série A, 4282, N° 5133.

3

LEDERER (Sylvie). — Le formalisme lagrangien et son application aux théories minkowskiennes de la gravitation et de l'électromagnétisme.

Th. Sc. Math. Paris, 1964, Série A, 4282, N° 5133.

4

LEDERER (Sylvie). — Le formalisme lagrangien et son application aux théories minkowskiennes de la gravitation et de l'électromagnétisme.

Th. Sc. Math. Paris, 1964, Série A, 4282, N° 5133.

SÉRIE A, N° 4282

N° D'ORDRE : 5133

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR
ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Sylvie LEDERER

1^{re} THÈSE. — Le formalisme lagrangien et son application aux théories minkowskiennes de la gravitation et de l'électromagnétisme.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 8 mai 1964 devant la Commission d'examen.

M. LICHNEROWICZ	<i>Président.</i>
M ^{mes} TONNELAT	{ <i>Examineurs.</i>
CHOQUET	

Editions de la Revue d'Optique théorique et instrumentale

3 et 5, boulevard Pasteur — 165, rue de Sèvres

PARIS (15^e)

1964

Pour sauvegarder la cohérence interne de la théorie, c'est donc par l'intermédiaire de ces tenseurs que l'obtention des équations du mouvement, déduites d'un principe de conservation de l'énergie, pourra être rattachée au formalisme lagrangien. Alors que le tenseur canonique est le plus généralement employé, nous verrons que l'adoption du tenseur métrique comme tenseur d'impulsion-énergie se révèle plus heureuse et même nécessaire. En effet, même si, lors du choix d'un lagrangien, sont résolument écartés ceux qui correspondent à une approximation de la relativité générale, les lois du mouvement pourront prendre la même forme que dans la théorie d'Einstein et fournir, pour les « trois effets », les mêmes prévisions.

Malgré la forme et les conséquences de ces équations que nous déduisons d'une loi de conservation, une question se pose : nos lois du mouvement peuvent-elles également découler de l'emploi d'un lagrangien pour le système total champ-matière ?

Pour répondre à cette question, nous examinerons le cas d'un lagrangien d'interaction d'un degré d'homogénéité quelconque ; nous constaterons, ce faisant, une analogie formelle très marquée entre les trois cas suivants : le potentiel est un scalaire, un vecteur ou un tenseur.

Nous montrerons que l'on peut déterminer une paramétrisation adaptée des trajectoires (pour un lagrangien homogène de degré 1, le paramètre est l'élément linéaire de l'espace). Nous serons alors en complet accord, tant au point de vue de la loi de conservation ⁽¹⁾, c'est-à-dire du tenseur d'impulsion-énergie, qu'au point de vue des trajectoires, avec les résultats annoncés plus haut. Nous aurons ainsi établi les conditions d'un traitement similaire de l'électromagnétisme et d'une théorie euclidienne de la gravitation.

Le « tenseur métrique » s'impose donc finalement comme tenseur d'impulsion-énergie dans le cadre d'une théorie phénoménologique de la gravitation.

Nous nous trouvons également ainsi en possession de données utiles pour une critique des théories euclidiennes : approximations de la relativité générale, théorie du graviton, théories phénoménologiques plus récentes, etc.

Si l'on désire intégrer le champ électromagnétique à ces théories purement gravitationnelles, on peut envisager l'emploi d'un formalisme pentadimensionnel. On sait en effet quelles sont les réussites de la théorie de Jordan et Thiry.

Aux approximations de la théorie d'Einstein peuvent alors correspondre celles de la théorie de Thiry. Pour la théorie de la particule de spin total maximum 2, nous pouvons également proposer une correspondance ; toutes les équations de la théorie se trouvent condensées en un seul système.

Nous retranscrivons aussi la théorie euclidienne phénoménologique. Les identités qui résultent de l'emploi d'un lagrangien seront donc de nouveau utilisées et le « tenseur métrique » jouera toujours un rôle déterminant.

Ce formalisme nous permettra, en particulier, de calculer les effets expérimentaux, dans le cadre de la théorie euclidienne, mais dans l'hypothèse où le champ électromagnétique se superpose au champ de gravitation.

⁽¹⁾ les identités dont nous parlions plus haut étant remplacées par celles qu'a écrites A. Trautman [13].

NOTATIONS

Les indices latins majuscules M, N, ... prennent les valeurs 1, ..., 5.

Les indices grecs $\mu, \nu, \dots$ prennent les valeurs 1, ..., 4.

Les indices latins minuscules m, n, ... prennent les valeurs 1, 2, 3.

Coordonnée temporelle, $x^4 = ct$.

V_5 (ou V_5^0), variété riemannienne (ou euclidienne) à 5 dimensions.

V_4 (ou V_4^0), variété riemannienne (ou euclidienne) à 4 dimensions.

$g_{\mu\nu}$ (ou g_{MN}), métrique riemannienne ou euclidienne quelconque, de signature hyperbolique normale — — — + (ou — — — + —).

γ_{MN} , métrique minkowskienne, $\gamma_{5M} = -\delta_{5M}$, $\gamma_{4\mu} = \delta_{4\mu}$, $\gamma_{ij} = -\delta_{ij}$.

Formes quadratiques fondamentales,

$$dS^2 = g_{MN} dx^M dx^N, \quad ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

Dérivée partielle, $\partial_\rho \equiv \partial/\partial x^\rho$.

Dérivée covariante, ∇_ρ ($D \equiv dx^\rho \nabla_\rho$).

Dérivée variationnelle, $\frac{\delta}{\delta Q_{\mu\nu}} \equiv \frac{\partial}{\partial Q_{\mu\nu}} - \partial_\rho \frac{\partial}{\partial(\partial_\rho Q_{\mu\nu})}$.

I. Identités déduites d'un lagrangien. Tenseur « canonique » et tenseur « métrique »

Les avantages que l'on peut trouver à utiliser la méthode variationnelle, pour construire une théorie de champ cohérente, ne sont pas négligeables. Cette méthode, on le sait, permet non seulement d'introduire, de la façon la plus naturelle, des équations de champ covariantes et compatibles, mais surtout d'obtenir toutes les identités de la théorie, grâce auxquelles la définition de l'impulsion-énergie et la déduction des lois du mouvement se rattachent au lagrangien.

La liaison entre lois de conservation et isométries de l'espace-temps est bien connue, depuis les travaux de E. Noether [8]; elle a montré, en effet, que l'on obtient p identités, qui lient le premier membre des équations de champ et sa divergence, à partir de tout lagrangien, invariant par rapport à un groupe continu fini de transformations, dépendant de p paramètres.

Dans l'espace-temps euclidien, l'invariance d'une théorie de champ par rapport au groupe de Lorentz conduit à l'existence de dix lois de conservation; la covariance générale de la théorie d'Einstein se traduit par une infinité de lois de conservation, qui correspondent aux sous-groupes à un paramètre du groupe des transformations de coordonnées [17, 21, 13].

Plusieurs auteurs se sont intéressés à la question, les uns [17, 22, 23, 13] sous l'angle le plus général où les méthodes de la théorie des groupes continus s'imposent, les autres [2, 5 à 7, 9, 10, 15] dans des cas plus particuliers; selon que l'on considère, en effet, des potentiels de gravitation confondus avec les composantes de la métrique [7, 6], que l'on néglige les sources du champ ou encore que l'on

favorise d'emblée le « tenseur canonique » [2, 9], les résultats se simplifient plus ou moins.

Nous nous contenterons, ici, de présenter le calcul sous la forme la plus favorable aux applications, essentiellement euclidiennes, que nous avons en vue.

Les potentiels d'un éventuel champ de gravitation seront donc pour nous, dès le départ, strictement distincts des composantes de la métrique d'univers, qui entreront comme variables dans l'expression du lagrangien. Nous écrirons les identités sans préjuger du second membre des équations de champ ; elles mèneront bien entendu aux définitions des tenseurs « métrique » et « canonique » d'impulsion-énergie, qui y seront systématiquement mis en évidence.

Nous appliquerons une méthode qui remonte à H. Weyl [14], à des lagrangiens ne contenant pas de dérivées d'ordre supérieur au premier. A cette condition près, il ne sera pas nécessaire de les expliciter. Le formalisme employé permettra, à titre d'exemple, de retrouver les résultats bien connus des théories d'Einstein et de Maxwell, puis d'examiner le cas d'une théorie linéaire euclidienne d'un champ phénoménologique quelconque.

1. Les identités. — Nous disposons donc, par hypothèse, d'une densité scalaire de la forme

$$(I.1) \quad \mathcal{L} \equiv L \sqrt{-g} \equiv \mathcal{L}(Q_{\mu\nu}, \partial_\rho Q_{\mu\nu}),$$

fonction des variables $Q_{\mu\nu}$ et de leurs seules dérivées premières.

Par $Q_{\mu\nu}$ nous désignons à la fois les composantes $g_{\mu\nu}$ de la métrique et les composantes, également symétriques, d'un potentiel tensoriel $\psi_{\mu\nu}$. (Ce dernier, en fait, sera aisément remplacé au besoin par un potentiel vectoriel, l'adaptation des résultats étant immédiate.)

Puisque le calcul qui suit n'exige pas de précision, $g_{\mu\nu}$ reste une métrique quelconque, qui sera, selon l'application envisagée, riemannienne ou euclidienne ⁽²⁾.

1. Calcul des identités. — L'intégrale d'action $\int \mathcal{L} d^4x$ ⁽³⁾ est, par définition, invariante dans une transformation infinitésimale des coordonnées que nous supposons définie par le champ de vecteurs de composantes ξ^ρ ; cette transformation fait passer des coordonnées x^ρ aux coordonnées

$$(I.2) \quad x'^\rho = x^\rho + \xi^\rho.$$

On sait que les variables, lors d'une telle transformation, subissent, en un même point, une variation (dérivée de Lie) $XQ_{\mu\nu}$ donnée par

$$(I.3) \quad XQ_{\mu\nu} = \xi^\rho \partial_\rho Q_{\mu\nu} + Q_{\rho\nu} \partial_\mu \xi^\rho + Q_{\mu\rho} \partial_\nu \xi^\rho.$$

En conséquence, l'intégrale d'action présente la variation

$$(I.4) \quad \int X\mathcal{L} d^4x - \int \partial_\rho (\mathcal{L} \xi^\rho) d^4x,$$

où le premier terme résulte de la dérivée de Lie de $\mathcal{L}$, le second étant dû à la modification du domaine d'intégration.

⁽²⁾ Les indices grecs prennent les valeurs 1, 2, 3, 4 ; $x^4 = ct$; le symbole ∂_ρ désigne la dérivée partielle $\partial/\partial x^\rho$; g est le déterminant $|g_{\mu\nu}|$.

⁽³⁾ $d^4x = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^4$.

Cette variation doit s'annuler identiquement. Ainsi, d'après l'expression (I.4) de $\mathcal{L}$,

$$(I.5) \quad \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_{\mu\nu}} X Q_{\mu\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho Q_{\mu\nu})} \partial_\rho X Q_{\mu\nu} - \partial_\rho (\mathcal{L} \xi^\rho) \right] d^4x = 0.$$

Le second terme s'intègre par parties ; donc, en introduisant la « dérivée variationnelle »

$$(I.6) \quad \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta Q_{\mu\nu}} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_{\mu\nu}} - \partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho Q_{\mu\nu})},$$

(I.5) devient

$$(I.7) \quad \int \left\{ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta Q_{\mu\nu}} X Q_{\mu\nu} + \partial_\rho \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho Q_{\mu\nu})} X Q_{\mu\nu} - \mathcal{L} \xi^\rho \right] \right\} d^4x = 0.$$

Après avoir porté (I.3) dans (I.7) et en tenant compte de la symétrie $Q_{\mu\nu} = Q_{\nu\mu}$, on obtient

$$(I.8) \quad \int \left\{ \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta Q_{\mu\nu}} \partial_\rho Q_{\mu\nu} - 2 \partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta Q_{\mu\nu}} Q_{\rho\nu} \right) \right] \xi^\rho + \partial_\sigma \left[\left(2 \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta Q_{\sigma\rho}} Q_{\nu\rho} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma Q_{\mu\rho})} \partial_\nu Q_{\mu\rho} - \mathcal{L} \delta_\nu^\sigma \right) \xi^\nu + 2 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma Q_{\rho\mu})} Q_{\nu\mu} \right) \partial_\rho \xi^\nu \right] \right\} d^4x = 0.$$

Or, les ξ^ρ sont tout à fait quelconques ; dans le cas où eux-mêmes et leurs dérivées sont nuls aux limites du domaine d'intégration, le terme en divergence de (I.8) [seconde expression entre crochets], transformé par le théorème de Stokes, n'apporte rien à l'intégrale ; il est par conséquent nécessaire que

$$(I.9) \quad \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta Q_{\mu\nu}} \partial_\rho Q_{\mu\nu} - 2 \partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta Q_{\mu\nu}} Q_{\rho\nu} \right) \equiv 0.$$

Il est manifeste que cette identité est totalement indépendante des ξ^ρ ; elle se trouve donc vérifiée dans tous les cas, c'est-à-dire même si les ξ^ρ et leurs dérivées ne sont pas nuls aux limites.

L'intégrale (I.8) se réduit alors au second terme entre crochets ; si l'on choisit successivement les ξ^ρ constants, puis les $\partial_\nu \xi^\rho$ constants, on constate, par le même raisonnement que ci-dessus, que l'on doit toujours avoir

$$(I.10) \quad \partial_\sigma \left[2 \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta Q_{\sigma\rho}} Q_{\nu\rho} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma Q_{\mu\rho})} \partial_\nu Q_{\mu\rho} - \mathcal{L} \delta_\nu^\sigma \right] \equiv 0,$$

$$(I.11) \quad 2 \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta Q_{\sigma\rho}} Q_{\nu\rho} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma Q_{\mu\rho})} \partial_\nu Q_{\mu\rho} - \mathcal{L} \delta_\nu^\sigma + 2 \partial_\rho \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho Q_{\sigma\mu})} Q_{\nu\mu} \right] \equiv 0.$$

Enfin, si (I.9), (I.10) et (I.11) sont satisfaites, il est nécessaire que

$$(I.12) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma Q_{\rho\mu})} Q_{\nu\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho Q_{\sigma\mu})} Q_{\nu\mu} \equiv 0.$$

Nous avons donc obtenu trois séries d'identités (I.9), (I.11) et (I.12), que l'on retrouvera chaque fois qu'interviendra un lagrangien satisfaisant (I.1). [(I.10) n'est visiblement qu'une conséquence de (I.11) et (I.12).]

Si l'on considérait séparément les sous-groupes du groupe des déplacements, on verrait que ces identités résultent simplement, les unes de l'invariance dans les translations, les autres de l'invariance dans les rotations [5, 15].

Il suit encore de (I.9) et (I.10),

$$(I.13) \quad \partial_\sigma \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma Q_{\mu\rho})} \partial_\nu Q_{\mu\rho} - \mathcal{L} \delta_\nu^\sigma \right] = - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta Q_{\mu\rho}} \partial_\nu Q_{\mu\rho}.$$

2. *Tenseur « métrique » et tenseur « canonique ».* — Distinguons désormais, parmi les variables $Q_{\mu\nu}$, les deux ensembles distincts qu'elles représentent par hypothèse : composantes de la métrique $g_{\mu\nu}$ et composantes d'un potentiel phénoménologique $\psi_{\mu\nu}$.

Les identités que nous venons d'obtenir mettent donc en jeu les expressions suivantes ⁽⁴⁾ :

$$(I.14) \quad A^{\mu\nu} \sqrt{-g} \equiv \delta \mathcal{L} / \delta \psi_{\mu\nu},$$

$$(I.15) \quad {}^{(m)}t^{\mu\nu} \sqrt{-g} \equiv -\lambda \delta \mathcal{L} / \delta g_{\mu\nu},$$

$$(I.16) \quad t_\mu^\nu \sqrt{-g} \equiv \frac{\lambda}{2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu g_{\rho\sigma})} \partial_\mu g_{\rho\sigma} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \psi_{\rho\sigma})} \partial_\mu \psi_{\rho\sigma} - \mathcal{L} \delta_\mu^\nu \right].$$

Ce sont : les composantes contravariantes, symétriques, d'un tenseur phénoménologique et du « tenseur métrique », dont les définitions respectives font jouer le même rôle à $\psi_{\mu\nu}$ et $g_{\mu\nu}$; les composantes mixtes du « tenseur canonique », qui est en général asymétrique.

En définissant de plus $N^{\rho\sigma}_\nu$ par

$$(I.17) \quad N^{\rho\sigma}_\nu \sqrt{-g} \equiv \mathcal{H}^{\rho\sigma}_\nu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho g_{\sigma\mu})} g_{\nu\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho \psi_{\sigma\mu})} \psi_{\nu\mu},$$

nous donnons aux identités (I.11), (I.19), (I.13) et (I.12), les formes suivantes ⁽⁵⁾ :

$$(I.18) \quad \sqrt{-g} t_\nu^\sigma = \sqrt{-g} t_\nu^{(c)\sigma} + \lambda \sqrt{-g} A^{\rho\sigma} \psi_{\rho\nu} + \lambda \partial_\rho \mathcal{H}^{\rho\sigma}_\nu,$$

$$(I.19) \quad \partial_\mu (\sqrt{-g} t_\rho^{(m)\mu}) = \frac{1}{2} \sqrt{-g} {}^{(m)}t^{\mu\nu} \partial_\rho g_{\mu\nu} + \\ + \lambda \partial_\mu (\sqrt{-g} A^{\mu\nu} \psi_{\rho\nu}) - \frac{1}{2} \lambda \sqrt{-g} A^{\mu\nu} \partial_\rho \psi_{\mu\nu},$$

$$(I.20) \quad \partial_\mu (\sqrt{-g} t_\rho^{(c)\mu}) = \frac{1}{2} \sqrt{-g} t^{\mu\nu} \partial_\rho g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \lambda \sqrt{-g} A^{\mu\nu} \partial_\rho \psi_{\mu\nu},$$

$$(I.21) \quad \mathcal{H}^{\rho\sigma}_\nu + \mathcal{H}^{\sigma\rho}_\nu = 0.$$

Les identités fournissent donc, comme on le voit, une relation entre tenseur « métrique » et tenseur « canonique », ainsi que l'expression de la divergence de chacun.

3. *Forme covariante des identités.* — Les relations (I.9) à (I.13), sont écrites sous la forme brute qui résulte de la méthode employée. Cependant, étant donné cette méthode même, on doit pouvoir en produire une expression visiblement covariante.

Dans ce but, nous éliminons les dérivées partielles, en utilisant la définition des dérivées covariantes et en notant que l'on a toujours $\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0$.

Ainsi, en tenant compte de (I.21),

$$\partial_\rho \mathcal{H}^{\rho\sigma}_\nu = \nabla_\rho \mathcal{H}^{\rho\sigma}_\nu + \left\{ \begin{matrix} \tau \\ \nu \rho \end{matrix} \right\} \mathcal{H}^{\rho\sigma}_\tau.$$

⁽⁴⁾ λ est un facteur déterminé par le choix des unités.

⁽⁵⁾ Les auteurs déjà cités ne distinguent pas nettement en général les $\psi_{\mu\nu}$ des $g_{\mu\nu}$ et les contributions respectives de ces tenseurs aux identités.

Il est évident, de plus, que

$$\partial \mathcal{L} / \partial (\partial_\sigma \psi_{\mu\rho}) = \partial \mathcal{L} / \partial (\nabla_\sigma \psi_{\mu\rho}) .$$

Finalement, (I.9) et (I.14) deviennent (cf. [10])

$$(I.22) \quad \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi_{\mu\nu}} \nabla_\rho \psi_{\mu\nu} = 2 \nabla_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi_{\mu\nu}} \psi_{\rho\nu} + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g_{\mu\nu}} g_{\rho\nu} \right) ,$$

$$(I.23) \quad 2 \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi_{\sigma\rho}} \psi_{\nu\rho} + 2 \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g_{\sigma\rho}} g_{\nu\rho} + \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla_\sigma \psi_{\mu\rho})} \nabla_\nu \psi_{\mu\rho} - \mathcal{L} \delta_\nu^\sigma \right] + 2 \nabla_\rho \mathcal{L}^{\rho\sigma}_\nu = 0 .$$

Cette dernière identité nous incite évidemment à poser, plutôt que (I.16),

$$(I.16') \quad t_\mu^{(e)'} \sqrt{-g} = \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_\nu \psi_{\rho\sigma}} \nabla_\mu \psi_{\rho\sigma} - \delta_\mu^\nu \mathcal{L} \right) ,$$

de sorte que (I.18), (I.19) et (I.20) peuvent être remplacés par

$$(I.18') \quad t_\nu^{(m)'} = t_\nu^{(e)'} + \lambda A^{\sigma\rho} \psi_{\nu\rho} + \lambda \nabla_\rho N^{\rho\sigma}_\nu ,$$

$$(I.19') \quad \nabla_\mu t_\rho^{(m)'} = -\frac{1}{2} \lambda A^{\mu\nu} \nabla_\rho \psi_{\mu\nu} + \lambda \nabla_\mu (A^{\mu\nu} \psi_{\rho\nu}) ,$$

$$(I.20') \quad \nabla_\sigma t_\nu^{(e)'} = -\frac{1}{2} \lambda A^{\sigma\rho} \nabla_\nu \psi_{\sigma\rho} + \lambda \nabla_\rho \nabla_\sigma N^{\rho\sigma}_\nu .$$

Remarquons que (I.19') est valable quelle que soit la définition du tenseur canonique adoptée ; de (I.18) et (I.19') on déduit encore

$$(I.24) \quad \nabla_\rho t_\nu^{(e)'} = -\frac{\lambda}{2} A^{\mu\rho} \nabla_\nu \psi_{\mu\rho} - \lambda \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \nu \tau \end{matrix} \right\} \nabla_\rho N^{\tau\rho}_\alpha + \lambda \nabla_\rho \nabla_\tau N^{\rho\tau}_\nu .$$

Il est bien évident que (I.16') n'est utilisable que dans une théorie phénoménologique ($\psi_{\rho\sigma} \neq g_{\rho\sigma}$) et que l'antisymétrie qu'exprime (I.21) annule le dernier terme de (I.20') dans l'espace euclidien.

4. Equations de champ. — Jusqu'ici, les deux groupes de variables ont joué le même rôle ; l'analogie s'arrête cependant à la forme des définitions (I.14) et (I.15). En effet, dès qu'il s'agit de déduire les équations de champ d'un principe variationnel, seules les variables indépendantes sont à considérer, c'est-à-dire les $\psi_{\mu\nu}$. Le premier membre des équations d'Euler n'est donc autre que $A^{\mu\nu}$, défini par (I.14) et (I.6).

Aussi les équations de champ dans le vide s'écrivent-elles

$$(I.25) \quad A^{\mu\nu} = 0 .$$

La présence de matière se traduit par un second membre, soit

$$(I.26) \quad A^{\mu\nu} = M^{\mu\nu} ,$$

que l'on peut, au besoin, obtenir par adjonction au lagrangien d'un terme $-\mathcal{L}'$ adéquat : $M^{\mu\nu} \sqrt{-g} \equiv \delta \mathcal{L}' / \delta \psi_{\mu\nu}$.

Les identités (I.18) à (I.24) donnent, sur le comportement dans le vide des tenseurs métrique et canonique, les renseignements suivants, qui auront leur importance dans la suite :

ces tenseurs diffèrent par la divergence d'une expression antisymétrique ⁽⁶⁾ ;

⁽⁶⁾ Ceci revient aussi à dire que la partie antisymétrique du tenseur canonique est la divergence d'une expression antisymétrique ; cette propriété (vraie seulement dans le vide) est souvent utilisée pour symétriser ce tenseur. Nous en reparlerons au chapitre II.

ils ont, par conséquent, même divergence ordinaire ;
la divergence covariante du tenseur « métrique » est nulle.

2. Deux exemples : théories d'Einstein et de Maxwell. — Tout ce qui précède est valable quel que soit le lagrangien satisfaisant à la condition (I.1). La donnée de L^2 caractérise la théorie et oriente l'interprétation des identités qui en découlent.

1. Relativité générale. — En relativité générale, les potentiels de gravitation sont identiques aux composantes de la métrique d'espace-temps, qui sont des variables indépendantes. (Dans un espace euclidien, au contraire, les $g_{\mu\nu}$ sont liés par la relation $R_{\mu\nu,\rho\sigma} = 0$.)

On sait qu'en fait il n'existe pas, dans l'espace-temps de Riemann, d'invariant de la forme (I.1) ; si cependant, dans la densité d'action $R \sqrt{-g}$ associée à la courbure scalaire R , on sépare les termes qui ne contiennent pas les dérivées secondes des potentiels, soit $-G \sqrt{-g}$, cette expression est invariante dans les transformations linéaires de coordonnées ; les équations de champ résultent indifféremment des intégrales d'action associées à R ou à G .

Rappelons que

$$(I.27) \quad G = g^{\mu\nu} \left[\begin{pmatrix} \alpha \\ \mu \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \beta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \beta \\ \mu \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \nu \beta \end{pmatrix} \right].$$

Puisque les potentiels de gravitation sont confondus avec les $g_{\mu\nu}$, le premier membre des équations de champ n'est autre que le tenseur « métrique » $^{(7)}$: ces équations expriment l'égalité de ce dernier et du tenseur d'énergie matérielle qui se trouve au second membre :

$$(I.28) \quad A^{\mu\nu} \equiv -(1/\lambda) \begin{pmatrix} (m) \mu\nu \\ t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} (m) \mu\nu \\ t \end{pmatrix} = -\lambda M^{\mu\nu}.$$

Dans (I.18), (I.19) et (I.20), les termes contenant $A^{\mu\nu}$ sont à supprimer, puisqu'ils feraient double emploi ; il reste

$$(I.29) \quad \sqrt{-g} \begin{pmatrix} (m) \sigma \\ t_\nu \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (c) \sigma \\ t_\nu \end{pmatrix} = \lambda \partial_\rho \zeta^{\rho\sigma}{}_\nu,$$

$$(I.30) \quad \partial_\mu (\sqrt{-g} \begin{pmatrix} (m) \mu \\ t_\rho \end{pmatrix}) = \frac{1}{2} \sqrt{-g} t^{\mu\nu} \partial_\rho g_{\mu\nu} \quad \text{ou} \quad \nabla_\mu \begin{pmatrix} (m) \mu \\ t_\rho \end{pmatrix} = 0,$$

$$(I.31) \quad \partial_\mu (\sqrt{-g} \begin{pmatrix} (m) \mu \\ t_\rho \end{pmatrix}) = \partial_\mu (\sqrt{-g} \begin{pmatrix} (c) \mu \\ t_\rho \end{pmatrix}),$$

c'est-à-dire les relations bien connues ; dans tous les cas (extérieur ou intérieur), $\begin{pmatrix} (m) \mu \\ t_\nu \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} (c) \mu \\ t_\nu \end{pmatrix}$ ont pour différence la divergence (ordinaire) d'un « superpotentiel » antisymétrique [11, 4] et ont donc même divergence [3] ; le « tenseur métrique » est conservatif au sens de la divergence covariante. Etant donné (I.28), on peut répéter les lignes ci-dessus en mettant $M^{\mu\nu}$ au lieu de $\begin{pmatrix} (m) \mu\nu \\ t \end{pmatrix}$.

Rappelons encore qu'avec (I.27),

$$(I.32) \quad \begin{pmatrix} (c) \nu \\ t_\mu \end{pmatrix} = \frac{\lambda}{2} \left[\left(g^{\rho\nu} g^{\alpha\sigma} \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \beta \end{pmatrix} - g^{\beta\rho} g^{\alpha\sigma} \begin{pmatrix} \nu \\ \beta \alpha \end{pmatrix} - \frac{1}{2} g^{\alpha\tau} g^{\rho\sigma} \begin{pmatrix} \nu \\ \beta \tau \end{pmatrix} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} g^{\alpha\tau} g^{\rho\sigma} \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \beta \end{pmatrix} \right) \delta_{\mu}^{\nu} g^{\rho\sigma} + \delta_{\mu}^{\nu} g^{\rho\sigma} \left(\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \sigma \beta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha \\ \rho \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \beta \end{pmatrix} \right) \right].$$

(7) On a évidemment $A^{\mu\nu} \equiv S^{\mu\nu} \equiv$ tenseur d'Einstein.

2. *Electromagnétisme maxwellien.* — En relativité restreinte, le champ électromagnétique dérive du potentiel vecteur φ_ν : $\varphi_{\mu\nu} = \nabla_\mu \varphi_\nu - \nabla_\nu \varphi_\mu$.

Les identités, qu'en fait nous avons écrites pour un potentiel tenseur, donnent, dans le cas d'un potentiel vecteur (espace euclidien),

$$\begin{aligned} t_{\mu}^{(m)\rho} &= t_{\mu}^{(c')\rho} + \frac{\lambda}{2} A^\rho \varphi_\mu + \lambda \nabla_\sigma N^{\sigma\rho}{}_\mu, \\ \nabla_\rho t_{\mu}^{(m)\rho} &= -\frac{\lambda}{2} A^\rho \nabla_\mu \varphi_\rho + \frac{\lambda}{2} \nabla_\rho (A^\rho \varphi_\mu), \\ \nabla_\rho t_{\mu}^{(c')\rho} &= -\frac{\lambda}{2} A^\rho \nabla_\mu \varphi_\rho, \end{aligned}$$

avec, évidemment,

$$\begin{aligned} A^\rho \sqrt{-g} &= \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi_\rho}, \quad t_{\mu}^{(c')\rho} \sqrt{-g} = \frac{\lambda}{2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla_\rho \varphi_\nu)} \nabla_\mu \varphi_\nu - \delta_\mu^\rho \mathcal{L} \right], \\ \mathcal{H}^{\rho\sigma}{}_\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho g_{\sigma\nu})} g_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho \varphi_\sigma)} \varphi_\mu. \end{aligned}$$

Supposons que

$$(I.33) \quad \partial \mathcal{L} / \partial \varphi_\rho = 0 \quad \text{et} \quad \partial \mathcal{L} / \partial (\partial_\sigma g_{\sigma\nu}) = 0;$$

alors $\mathcal{H}^{\rho\sigma}{}_\mu + \mathcal{H}^{\sigma\rho}{}_\mu = 0$ donne

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho \varphi_\sigma)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma \varphi_\rho)} = 0,$$

d'où $\nabla_\rho A^\rho \equiv 0$. Ainsi $\nabla_\rho t_{\mu}^{(m)\rho} = \frac{1}{2} \lambda A^\rho (\nabla_\rho \varphi_\mu - \nabla_\mu \varphi_\rho)$.

Dans la théorie de Maxwell,

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(g_{\mu\nu}, \partial_\nu g_{\mu\rho}, \varphi_\mu, \partial_\nu \varphi_\mu) = \frac{1}{4} \varphi^{\mu\nu} \varphi_{\mu\nu} \sqrt{-g}.$$

Les hypothèses (I.33) sont réalisées.

Le premier membre des équations de champ s'écrit $A^\mu = \nabla_\sigma \varphi^{\sigma\mu}$. Portons-le dans les identités, en faisant $\lambda = 2$,

$$(I.34) \quad t_{\nu}^{(m)\sigma} = -t_{\nu}^{(c')\sigma} + \varphi^{\sigma\rho} \nabla_\rho \varphi_\nu,$$

$$(I.35) \quad \nabla_\mu t_{\rho}^{(m)\mu} = \varphi_{\rho\mu} \nabla_\sigma \varphi^{\sigma\mu},$$

$$(I.36) \quad \nabla_\sigma t_{\nu}^{(c')\sigma} = \nabla_\sigma \varphi^{\sigma\rho} \nabla_\nu \varphi_\rho.$$

On peut calculer que $t_{\mu}^{(c')\nu} = \varphi^{\nu\sigma} \nabla_\mu \varphi_\sigma - \delta_\mu^\nu L$ et par conséquent, d'après (I.34), le « tenseur métrique » est identique au tenseur de Maxwell :

$$t_{\nu}^{(m)\rho} = -\varphi^{\rho\sigma} \varphi_{\nu\sigma} + \frac{1}{4} \delta_\nu^\rho \varphi^{\alpha\beta} \varphi_{\alpha\beta}.$$

Comme (I.34), (I.35) et (I.36) l'indiquent, t et t sont tous deux conservatifs en l'absence de sources ($A^\mu = 0$) et ne diffèrent par une divergence antisymétrique que dans ce cas.

C'est au chapitre suivant que nous rappellerons la signification des tenseurs « métrique » et « canonique » dans le cadre des deux théories précédentes, dont la comparaison éclairera l'étude d'une théorie euclidienne de la gravitation.

II. Equations du mouvement et tenseur d'impulsion-énergie

Nous nous proposons d'étudier la définition d'une impulsion-énergie gravitationnelle, pour une théorie phénoménologique du champ de gravitation, dans le cadre des principes de la relativité restreinte.

En relativité générale, la retranscription locale dans l'espace euclidien tangent est toujours possible ; on peut obtenir des théories euclidiennes approchées, en considérant des champs faibles ; ces théories supposent par essence la donnée préalable de celle d'Einstein.

Une théorie autonome, dont la première approximation sera la théorie de Newton, devra prévoir correctement les « trois effets » : c'est en ce sens que la comparaison à la relativité générale pourra être profitable.

L'existence d'un lagrangien, qu'il soit ou non explicite, d'où les équations de champ sont déductibles, impose, on l'a vu, un certain nombre d'identités. Celles-ci peuvent définir, à une divergence près, une impulsion-énergie du champ. Quelle que soit la façon dont sont introduites les équations du mouvement, elles impliquent, elles aussi, des conditions de conservation. Il importe que ces conditions portent sur la même impulsion-énergie.

Tel n'est pas le cas, comme nous le verrons, dans la plupart des théories euclidiennes. Alors que le choix se porte généralement sur le « tenseur canonique », le « tenseur métrique » permet au contraire d'éviter ces discordances. Nous allons voir que ceci est possible sans introduire d'arbitraire excessif.

1. Le problème du tenseur d'impulsion-énergie du champ. Dans un espace euclidien, on peut donner à la loi de conservation de l'énergie totale la forme covariante

$$(II.1) \quad \nabla_{\mu}(M_{\nu}^{\mu} + t_{\nu}^{\mu}) = 0,$$

où M_{ν}^{μ} est le tenseur qui figure au second membre des équations de champ et t_{ν}^{μ} le tenseur d'impulsion-énergie du champ de gravitation total, expression quadratique du potentiel et ses dérivées.

Ce dernier tenseur est tenu de satisfaire à certaines conditions :

être conservatif dans le vide, donc $A^{\mu\nu} = 0$ doit entraîner

$$(II.2) \quad \nabla_{\mu} t_{\nu}^{\mu} = 0;$$

être symétrique ;

conduire, par le truchement de (II.1), à des lois du mouvement acceptables.

Des conditions telles que (II.1) ne peuvent résulter que d'équations de champ non linéaires ; dans le cas linéaire, il est nécessaire de les poser d'emblée ; il est nécessaire également, par conséquent, d'exiger que la divergence $\nabla_{\mu} A^{\nu\mu}$ ne soit pas identiquement nulle.

La condition de symétrie pour $t^{\mu\nu}$ assure la conservation du moment angulaire ; les relations (en coordonnées cartésiennes) $\partial_{\mu}(M_{\nu}^{\mu} + t_{\nu}^{\mu}) = 0$ et $t^{\mu\nu} = t^{\nu\mu}$ ont pour conséquence

$$(II.3) \quad \partial_{\mu}[(t^{\nu\mu} + M^{\nu\mu}) x^{\rho} - (t^{\rho\mu} + M^{\rho\mu}) x^{\nu}] = 0.$$

On sait toutefois que l'addition, à un tenseur d'énergie admissible, de la diver-

gence d'une expression antisymétrique fournit un nouveau tenseur, également admissible ; sa divergence et le vecteur impulsion-énergie total sont inchangés. On tire souvent parti de cette propriété dans les essais de symétrisation d'un tenseur, au départ asymétrique, mais présentant quelque avantage (divergence satisfaisante).

Si le tenseur primitif $t^{\mu\nu} (\neq t^{\nu\mu})$ devient, lors de cette opération, $t^{\mu\nu} + \partial_\rho S^{\mu,\nu\rho} (= t^{\nu\mu} + \partial_\rho S^{\nu,\mu\rho})$ où $S^{\mu,\nu\rho} = -S^{\mu,\rho\nu}$, (II.3) est remplacé par

$$(II.4) \quad \partial_\nu [(M^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}) x^\rho - (M^{\rho\nu} + t^{\rho\nu}) x^\mu + (S^{\mu,\rho\nu} - S^{\rho,\mu\nu})] = 0$$

et le terme supplémentaire s'interprète comme provenant du spin ⁽⁸⁾.

Nous avons vu que l'emploi d'un lagrangien fournit les deux tenseurs, ^(m) t symétrique et ^(c') t asymétrique ; tous deux, d'après (I.19') et (I.20'), sont conservatifs dans le vide, leur divergence étant liée, par ces identités, au second membre des équations de champ. Chacun (^(c') t éventuellement symétrisé) peut donc prétendre au rôle d'impulsion-énergie du champ comme d'ailleurs l'une quelconque de leurs combinaisons linéaires.

En ce qui concerne la symétrisation du tenseur canonique (méthode de Belinfante [1]), insistons sur le point suivant : si la partie antisymétrique du tenseur $t^{\mu\nu}$ a la forme d'une divergence, c'est-à-dire si

$$(II.5) \quad t^{\mu\nu} - t^{\nu\mu} = \partial_\rho f^{\mu\nu,\rho} \quad (f^{\mu\nu,\rho} = -f^{\nu\mu,\rho}),$$

il est bien évident que le tenseur

$$(II.6) \quad t^{\mu\nu} + \partial_\tau S^{\tau,\nu,\mu}, \quad \text{avec} \quad S^{\tau,\nu,\mu} = \frac{1}{2} (f^{\nu\mu,\tau} - f^{\tau\nu,\mu} + f^{\mu\tau,\nu}),$$

est symétrique et conservatif quand $t^{\mu\nu}$ l'est.

Or, selon (I.18'), la condition (II.5) est remplie par ^(c') t dans le vide. On s'aperçoit, grâce encore à (I.18'), que le procédé qui vient d'être rappelé, appliqué à ^(m) t , conduit simplement à t [2] ; en ce sens, ces deux tenseurs sont « équivalents » dans le vide.

Dans le cas intérieur, par contre, la symétrisation au sens habituel ne peut mener du « tenseur canonique » au « tenseur métrique » ⁽⁹⁾. On peut interpréter (I.18') en disant que pour obtenir ^(m) t , on ajoute à ^(c') t un terme d'interaction (deuxième terme du second membre) et un terme de spin [rapprochement avec (II.4), valable ici dans le vide seulement].

Il n'est pas illusoire, par conséquent, de comparer les mérites respectifs de chacun de ces tenseurs. Avant tout choix définitif, il faut en particulier examiner les conséquences qu'aurait une condition (II.1) où entrerait l'un d'eux sous la désignation de $t^{\mu\nu}$; les équations de mouvement diffèrent totalement selon le cas.

1. La conservation de l'énergie en relativité générale. — Rappelons des résultats

⁽⁸⁾ Certains auteurs ont préconisé l'emploi d'un tenseur asymétrique, afin précisément de tenir compte du spin [27, 29].

⁽⁹⁾ Dans [45] A. Capella adopte pour le tenseur d'impulsion-énergie l'expression du « tenseur métrique » dans le vide. De plus, il applique le procédé de symétrisation à un tenseur canonique symétrique.

contenus dans les relations du chapitre I. (II.1) ne peut exprimer une loi de conservation ; par contre, (I.27), d'après (I.25), s'écrit

$$(II.7) \quad \partial_\mu M_\nu{}^\mu = 0$$

ou aussi bien, d'après (I.28),

$$(II.8) \quad \partial_\mu \left[\sqrt{-g} \left(M_\nu{}^\mu + \frac{1}{\lambda} {}^{(c)} t_\nu{}^\mu \right) \right] = 0.$$

a) Si, par conséquent, l'on identifie $(1/\lambda) {}^{(c)} t_\nu{}^\mu$ à l'impulsion-énergie gravitationnelle, la conservation de l'énergie totale résulte directement, sous la forme (II.8), de la méthode variationnelle. Ce fait, comme nous l'avons déjà souligné, ne peut se présenter pour une théorie linéaire.

Selon (I.26), l'énergie totale, asymétrique, dérive d'un « superpotentiel » :

$$(II.9) \quad \sqrt{-g} \left(M_\nu{}^\mu + \frac{1}{\lambda} {}^{(c)} t_\nu{}^\mu \right) = -\partial_\rho \mathcal{H}^{\rho\mu}{}_\nu.$$

Il n'est pas possible d'écrire une identité analogue à (II.4) pour la conservation d'un moment angulaire ; en élevant en effet les indices covariants dans (II.9), on introduit des termes supplémentaires étrangers à une divergence (cf. [7]) et qui disparaissent dans le cas d'une métrique minkowskienne ⁽¹⁰⁾.

P. G. Bergmann & R. Thomson [18] ont proposé de définir le moment par

$$(II.10) \quad \mathcal{H}^{\nu,\sigma\mu} \equiv \partial_\rho \mathcal{H}^{\rho\nu,\sigma\mu},$$

où

$$(II.11) \quad \mathcal{H}^{\rho\nu,\sigma\mu} \equiv \frac{1}{\lambda} (\mathcal{H}^{\rho\nu,\sigma} x^\mu - \mathcal{H}^{\rho\nu,\mu} x^\sigma) \quad (\mathcal{H}^{\rho\nu,\sigma} = g^{\mu\sigma} \mathcal{H}^{\rho\nu}{}_\mu).$$

Ceci revient à adopter comme tenseur d'énergie

$$(II.12) \quad \sqrt{-g} t^{\sigma\nu} = \sqrt{-g} \left(M^{\sigma\nu} + \frac{1}{\lambda} {}^{(c)} t^{\sigma\nu} \right) - \frac{1}{\lambda} \mathcal{H}^{\rho\nu}{}_\mu \partial_\rho g^{\mu\sigma}.$$

En effet, avec ces notations,

$$(II.13) \quad \mathcal{H}^{\nu,\sigma\mu} = (t^{\nu\mu} x^\sigma - t^{\nu\sigma} x^\mu) \sqrt{-g} + \frac{1}{\lambda} (\mathcal{H}^{\mu\nu,\sigma} - \mathcal{H}^{\sigma\nu,\mu})$$

et, d'après (II.10), $\mathcal{H}^{\nu,\sigma\mu}$ est identiquement conservatif ⁽¹¹⁾.

b) Rappelons qu'en prenant pour $M^{\mu\nu}$ le tenseur d'impulsion-énergie matérielle défini par

$$(II.14) \quad \begin{aligned} M^{\mu\nu} &= m c^2 u^\mu u^\nu, & u^\mu &= dx^\mu/ds, \\ ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, & g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu &= 1. \end{aligned}$$

la relation (II.7) entraîne à la fois :

l'équation de conservation de la masse

$$(II.15) \quad \nabla_\mu (m u^\mu) = 0 \quad \text{ou} \quad \partial_\mu (\sqrt{-g} m u^\mu) = 0,$$

les équations du mouvement

$$(II.16) \quad u^\mu \nabla_\mu u_\nu = 0 \quad \text{ou} \quad u^\mu \partial_\mu u_\nu = \frac{1}{2} u^\mu u^\sigma \partial_\nu g_{\mu\sigma}.$$

⁽¹⁰⁾ Dans [26], après introduction du tenseur de Minkowski dans l'espace riemannien, les indices sont justement élevés par son intermédiaire ; cf. aussi [30].

⁽¹¹⁾ Cf. aussi [29].

Il est bien connu que ces équations permettent de calculer pour les trois effets des valeurs confirmées par l'expérience.

On sait cependant que l'utilisation de t se heurte à des difficultés qu'une théorie euclidienne ignore, difficultés provenant de ce que t est en fait un pseudo-tenseur. De nombreux auteurs ont proposé leur solution à ces difficultés qui, néanmoins, ne sont pas jusqu'ici surmontées ⁽¹²⁾.

2. La conservation de l'énergie en électromagnétisme. — Les équations de Maxwell, lorsqu'existent des charges de densité ρ , deviennent $\nabla_{\sigma} \varphi^{\mu\sigma} = \rho u^{\mu}$. Dans ce cas, (I.35) s'écrit

$$(II.17) \quad \nabla_{\nu} t_{\mu}^{(m)\nu} = \rho \varphi_{\sigma\mu} u^{\sigma}.$$

Or, le second membre de cette équation coïncide avec l'expression de la force de Lorentz, imposée par l'expérience ; en écrivant donc la loi de conservation de l'énergie $\nabla_{\mu} (t_{\rho}^{(m)\mu} + M_{\rho}^{\mu}) = 0$ (qui assure aussi la conservation de la masse), on obtient les équations du mouvement correctes.

On constate aisément que, bien que t soit lui aussi conservatif dans le vide, ce tenseur ne conduit ni à la force de Lorentz, ni à la conservation de la masse.

2. Les équations du mouvement déduites d'un lagrangien. — Le lagrangien $\mathcal{L}$ défini par (I.4), c'est-à-dire l'expression que nous avons considérée jusqu'ici, est le lagrangien du champ libre ; les seules variables qui y figurent, à côté des $g_{\mu\nu}$, sont les potentiels du champ ; sa dérivée variationnelle, égale à 0, donne les équations du champ en l'absence de matière.

Pour le champ en présence de matière, nous pouvons soit écrire d'emblée les équations (I.26), soit adjoindre à $\mathcal{L}$ un terme $-\mathcal{L}'$. $\mathcal{L}'$ est lui-même la somme d'un lagrangien d'interaction $\mathcal{L}'_i$ et d'un lagrangien matériel $\mathcal{L}'_p$. Les équations de champ s'expriment alors par

$$(II.18) \quad \delta \mathcal{L} / \delta \psi_B = \delta \mathcal{L}' / \delta \psi_B \quad \text{ou} \quad \sqrt{-g} A^B = \sqrt{-g} A'^B.$$

(Pour plus de généralité, nous désignons ici par ψ_B un potentiel qui sera soit un scalaire ψ , soit un vecteur φ_{μ} , soit un tenseur $\psi_{\mu\nu}$.)

Les lois du mouvement s'obtiennent en faisant varier, dans $\mathcal{L}'$, les coordonnées d'un point de la matière.

Lorsqu'il s'agit d'explicitier $\mathcal{L}'$, deux représentations de la matière sont possibles : ensemble de particules ponctuelles ou fluide continu.

1. Identités et lois du mouvement dans le cas de particules ponctuelles. — Nous écrirons dans ce cas

⁽¹²⁾ C. Möller, dont le tenseur proposé dans [24] ne remplit pas toutes les conditions requises, est amené à changer de variables [25], tandis que C. Pellegrini propose une nouvelle définition du vecteur impulsion-énergie [28]. J. N. Goldberg [22], P. G. Bergmann [17] et A. Komar [23], exploitant la covariance générale, obtiennent des lois de conservation très générales dont l'interprétation n'est pas évidente. Dans un tout autre ordre d'idées, L. Bel [16] propose un tenseur de « superénergie » à quatre indices, qui généralise le tenseur de Maxwell.

$$(II.19) \quad \mathcal{L}'(x) = \int \Lambda(\psi_A(x), \dot{z}^\alpha) \delta^4(x - z) d\tau.$$

Pour simplifier l'écriture, nous nous limitons à une seule particule de coordonnées z^α ; l'équation paramétrique de sa trajectoire est $z^\alpha = z^\alpha(\tau)$, où τ est à priori un paramètre quelconque. Nous désignons par $\dot{z}^\alpha$ la dérivée $dz^\alpha/d\tau$, par $\delta^4(x - z)$ la fonction δ dans l'espace-temps. Nous admettons que τ n'intervient pas explicitement dans Λ .

a) Le principe variationnel $\delta \int \mathcal{L}' d^4x = 0$ pour des variations δz^α nulles aux limites du domaine d'intégration, donne les équations d'Euler-Lagrange pour la trajectoire :

$$(II.20) \quad \Lambda_\alpha \equiv \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{z}^\alpha} \right) - \frac{\partial \Lambda}{\partial z^\alpha} = 0.$$

On sait qu'en général, le paramètre qui entre dans (II.19) n'est autre que l'élément linéaire $d\tau = ds$. Alors $\dot{z}^\alpha$ est la quadrivitesse u^α et $\mathcal{L}'$ s'écrit

$$(II.19') \quad \mathcal{L}'(x) = \int l(\psi_A(x), u^\alpha) \delta^4(x - z) ds.$$

Cependant, à l'encontre des $\dot{z}^\alpha$, les u^α ne sont pas des variables indépendantes, puisque $u^\alpha u^\beta g_{\alpha\beta} = 1$. La variation de (II.19') ne conduit pas aux équations (II.20), où $d\tau$ serait remplacé par ds et Λ par l .

Il est nécessaire d'introduire :

ou bien un multiplicateur de Lagrange [34] ;

ou bien un paramètre auxiliaire, de façon à retrouver la forme (II.19) en remplaçant, dans (II.19'), u^α par $\dot{z}^\alpha / \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{z}^\mu \dot{z}^\nu}$, ds par $\sqrt{g_{\mu\nu} \dot{z}^\mu \dot{z}^\nu}$ [35, 39]. Les équations (II.20) sont alors remplacées par les équations d'Euler-Lagrange généralisées

$$(II.20'') \quad l_\alpha \equiv \frac{d}{ds} \left[\frac{\partial l}{\partial u^\alpha} + \left(l - \frac{\partial l}{\partial u^\rho} u^\rho \right) u_\alpha \right] - \frac{\partial l}{\partial u^\alpha} = 0.$$

b) Le long des courbes d'équation (II.20), on a

$$(II.21) \quad \dot{z}^\alpha \Lambda_\alpha \equiv \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{z}^\rho} \dot{z}^\rho - \Lambda \right) = 0,$$

d'où l'intégrale première

$$(II.22) \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{z}^\rho} \dot{z}^\rho - \Lambda = \text{Cte}.$$

(Son existence résulte de l'invariance de $\mathcal{L}'$ dans un changement de paramètre $\tau \rightarrow \tau + \varepsilon$ [13].)

Si toutefois Λ est une fonction homogène de degré 1 par rapport à $\dot{z}^\alpha$, (II.21) est identiquement vérifié. ($\mathcal{L}'$, dans ce cas, est invariant dans le changement $\tau \rightarrow f(\tau)$ [13].) Ainsi $u^\alpha l_\alpha = 0$, car la fonction $l(\dot{z}^\alpha / \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{z}^\mu \dot{z}^\nu}) \sqrt{g_{\rho\sigma} \dot{z}^\rho \dot{z}^\sigma}$ est homogène de degré 1.

Il est manifeste que l'homogénéité de degré 1 pour Λ est une circonstance très

favorable ; l'intégrale (II.19) est intrinsèquement définie [37, 38] ; les trajectoires (II.20) ne dépendent pas de la paramétrisation. On peut faire $d\tau = ds$.

Dans le cas contraire (Λ homogène de degré $h \neq 1$), la démarche la plus satisfaisante consiste à définir le paramètre τ de façon que (II.21) soit encore une identité, c'est-à-dire de façon que Λ devienne constant. Outre l'analogie avec le cas $h = 1$, ceci permet d'écarter l'intégrale première (II.22), qui peut, comme on le verra, n'être pas acceptable.

c) Du lagrangien total $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$ résultent les identités suivantes [13], extension de (I.19'),

$$(II.23) \quad \sqrt{-g} \nabla_\beta \left[t^\beta_\alpha - \frac{\lambda}{2} (A^B - A'^B) F_{B\alpha}^{AB} \psi_A \right] + \\ + \frac{\lambda}{2} \sqrt{-g} (A^B - A'^B) \nabla_\alpha \psi_B - \frac{\lambda}{2} \int \Lambda_\alpha \delta^4(x-z) d\tau \equiv 0 ;$$

$F_{B\alpha}^{AB}$ est la combinaison de symboles de Kronecker qui apparaît dans la dérivée de Lie des variables, selon leur genre ; $t^{\alpha\beta}$ est le « tenseur métrique » déduit du lagrangien total, soit, avec les notations du chapitre I,

$$(II.24) \quad \sqrt{-g} t^{\alpha\beta} = \sqrt{-g} {}^{(m)}t^{\alpha\beta} + \lambda \int \frac{\delta \Lambda}{\delta g_{\alpha\beta}} \delta^4(x-z) d\tau .$$

Lorsque le point de départ est un lagrangien (II.19'), il faut revenir, comme au paragraphe II.2.1a, à des variables indépendantes et (II.24) est remplacé par

$$\sqrt{-g} t^{\alpha\beta} = \sqrt{-g} {}^{(m)}t^{\alpha\beta} + \lambda \int \frac{\delta l}{\delta g_{\alpha\beta}} \delta^4(x-z) ds + \\ + \frac{\lambda}{2} \int \left(l - \frac{\partial l}{\partial u^\rho} u^\rho \right) u^\alpha u^\beta \delta^4(x-z) ds ,$$

avec, dans (II.23), l_α au lieu de Λ_α .

d) Lorsque les équations de champ (II.18) sont vérifiées, on déduit de (II.23)

$$\sqrt{-g} \nabla_\beta t^\beta_\alpha - \frac{\lambda}{2} \int \Lambda_\alpha \delta^4(x-z) d\tau = 0 .$$

Si donc les équations du mouvement sont données par (II.20), on a

$$(II.25) \quad \nabla_\beta t^\beta_\alpha = 0$$

et, réciproquement, si l'on pose cette loi de conservation, il suit que (II.20) est vérifié.

Ainsi, (II.25) s'impose comme loi de conservation de l'énergie associée aux lois du mouvement (II.20) et le « tenseur métrique » total dérivé de $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$ comme tenseur d'impulsion-énergie totale (champ et matière).

2. *Application : champs à potentiel scalaire, vectoriel ou tensoriel.* — Selon les auteurs, Λ , pour une particule libre, a pour expression soit $\Lambda_p = m (g_{\alpha\beta} \dot{z}^\alpha \dot{z}^\beta)^{1/2}$, soit $\Lambda_p = m g_{\alpha\beta} \dot{z}^\alpha \dot{z}^\beta$.

Avec la première de ces expressions, Λ_p est homogène de degré 1 ; les équations (II.20) donnent, avec $d\tau = ds$, l'équation des géodésiques

$$m \frac{D}{ds} u_\alpha = 0 \quad (D \equiv u^\rho \nabla_\rho) .$$

Avec la seconde expression, (II.20) s'écrit

$$m \frac{D}{d\tau} \dot{z}_\alpha = 0 ;$$

on n'obtient donc les mêmes trajectoires que si $d\tau = ds$, choix qui rend Λ constant. Ceci se produit également pour la forme générale, homogène de degré $2n$, $m (g_{\alpha\beta} \dot{z}^\alpha \dot{z}^\beta)^n$.

Passons au lagrangien d'interaction : son expression la plus simple est à priori, selon le cas, $\Lambda_i = m \psi$, $m \varphi_\mu \dot{z}^\mu$, $m \psi_{\mu\nu} \dot{z}^\mu \dot{z}^\nu$. Il est bien clair, de plus, qu'on peut lui donner un degré d'homogénéité quelconque (et, en particulier, le degré 1 ou bien le degré de Λ_p) en le multipliant par une puissance de $\sqrt{g_{\mu\nu} \dot{z}^\mu \dot{z}^\nu}$. Nous posons donc

$$(II.26) \quad \Lambda = \frac{m}{\lambda^n} (g_{\mu\nu} \dot{z}^\mu \dot{z}^\nu)^n + \frac{m}{\lambda} \Omega^2 (g_{\mu\nu} \dot{z}^\mu \dot{z}^\nu)^k$$

et, dans les trois cas retenus, nous définissons Ω^2 par

$$\Omega^2 = \lambda f \psi, \quad \Omega^2 = \lambda f \varphi_\mu \frac{\dot{z}^\mu}{\sqrt{g_{\alpha\beta} \dot{z}^\alpha \dot{z}^\beta}}, \quad \Omega^2 = \lambda f \psi_{\mu\nu} \frac{\dot{z}^\mu \dot{z}^\nu}{g_{\alpha\beta} \dot{z}^\alpha \dot{z}^\beta}.$$

(Donc $\Omega^2 = \lambda f \psi$, $\lambda f \varphi_\mu u^\mu$ ou $\lambda f \psi_{\mu\nu} u^\mu u^\nu$.)

Nous posons encore, selon le cas,

$$(II.27) \quad \begin{cases} \bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} [1 + (k-1) \Omega^2] + \lambda f \psi u_\mu u_\nu, \\ \bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} [1 + (k-1) \Omega^2] - \frac{1}{2} \lambda f (\varphi_\mu u_\nu + \varphi_\nu u_\mu), \\ \bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} [1 + (k-1) \Omega^2] + \lambda f \psi_{\mu\nu}. \end{cases}$$

Ainsi, nous avons toujours

$$(II.28) \quad \omega^2 = \bar{g}_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = 1 + k \Omega^2.$$

a) Si nous faisons $d\tau = ds$, les équations (II.20) s'éciraient

$$(II.29) \quad m \frac{D}{ds} (u^\nu \bar{g}_{\mu\nu}) - \frac{m}{2} u^\nu u^\rho \nabla_\mu \bar{g}_{\nu\rho} + m \frac{k-1}{2} \nabla_\mu \Omega^2 = 0$$

et (II.21)

$$(II.30) \quad (2k-1) d\Omega^2/ds = 0.$$

Nous serions alors devant l'alternative suivante :

fixer k à la valeur $1/2$: (II.30) serait identiquement vérifié, Λ_i étant, en effet, homogène de degré 1 [remarquons que Λ_p ne participe pas à la condition (II.21) relative au lagrangien total ; nous avons vu en effet qu'avec $d\tau = ds$, la condition relative à Λ_p est toujours vérifiée] ;

ou bien admettre que $\Omega^2 = \text{Cte}$ le long des trajectoires (II.29).

Ceci signifierait :

dans une théorie scalaire, $\psi = \text{Cte}$;

dans une théorie vectorielle, $\varphi_\mu u^\mu = \text{Cte}$;

dans une théorie tensorielle, $\psi_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = \text{Cte}$.

Ce résultat est donc critiquable dans le cas scalaire et n'est pas vérifié dans le cas vectoriel de l'électromagnétisme ; nous ne l'admettons pas dans une théorie tensorielle.

b) Les conséquences du choix $d\tau = ds$ ne le justifient donc pas à posteriori. II

reste alors à définir τ , comme indiqué plus haut, de façon que (II.21) soit identiquement réalisée quel que soit $k = n$ ($\neq 0$).

Nous constatons sans difficulté qu'avec $d\tau = ds^*$, où

$$(II.31) \quad ds^* = \omega^{1/k} ds,$$

nous avons simplement

$$(II.32) \quad \Lambda = m/\lambda k.$$

Nous pouvons définir

$$(II.33) \quad g_{\mu\nu}^* = g_{\mu\nu} \omega^{2(1-k)/k}$$

de façon que $ds^{*2} = g_{\mu\nu}^* dx^\mu dx^\nu$.

Les équations (II.20) sont, par conséquent, celles ⁽¹³⁾ des géodésiques de la « métrique » $g_{\mu\nu}^*$:

$$(II.34) \quad \frac{D}{ds^*} u_\alpha^* = 0.$$

Les notations sont claires ; tout ce qui est surmonté d'une étoile se rapporte à $g_{\mu\nu}^*$: $\bar{D} = \bar{u}^\rho \bar{\nabla}_\rho$, $\bar{u}_\rho = dx^\rho/ds^* = \omega^{-1/k} u^\rho$; la dérivation covariante $\bar{\nabla}_\rho$ se définit à l'aide de symboles de Christoffel $\{\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho\}$ formés par les $g_{\mu\nu}^*$.

Dans les notations non étoilées, (II.34) s'écrit

$$(II.35) \quad \frac{D}{ds} (u^\tau \bar{g}_{\sigma\tau}) - \frac{1}{2} u^\rho u^\tau \nabla_\sigma \bar{g}_{\rho\tau} + \\ + \frac{k-1}{2} \nabla_\sigma \Omega^2 - \left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{u^\tau}{\omega^2 \bar{g}_{\sigma\tau}} \frac{D}{ds} \Omega^2 = 0.$$

Il apparaît bien que, pour $k = 1/2$, (II.29) et (II.35) sont identiques et que pour cette valeur, le paramètre choisi est effectivement indifférent.

3. Identités et lois du mouvement dans le schéma fluide continu. Application. —

a) Les équations du champ (II.18) étant vérifiées, le lagrangien total $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$ [ou $(L - L') \sqrt{-g}$] conduit à la relation

$$(II.36) \quad \sqrt{-g} \nabla_\beta t_\alpha^\beta - \frac{1}{2} \lambda \mathcal{L}_\alpha = 0,$$

avec

$$(II.37) \quad t^{\alpha\beta} = t^{(m)\alpha\beta} + \lambda(\delta L'/\delta g_{\alpha\beta}),$$

$$(II.38) \quad \mathcal{L}_\alpha = \nabla_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{x}^\alpha} \dot{x}^\mu \right) - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \psi_B} \nabla_\alpha \psi_B.$$

Les équations

$$(II.39) \quad \mathcal{L}_\alpha = 0$$

impliquent, par conséquent, la conservation du tenseur $t^{\alpha\beta}$ et réciproquement. Elles entraînent de plus, si $\mathcal{L}'$ est homogène de degré h par rapport aux $\dot{x}^\alpha$,

$$(II.40) \quad \partial_\mu (\sqrt{-g} L'^{(h-1)/h} \dot{x}^\mu) = 0.$$

b) Reprenons, pour $\mathcal{L}'$, l'expression (II.26) et faisons $d\tau = ds$ (comme à l'habitude), après calcul. Les équations (II.39) s'écrivent

⁽¹³⁾ Cf. dans le cas scalaire [36, 70].

$$(II.41) \quad \frac{1}{\sqrt{-g}} \mathcal{L}_\alpha = m \frac{D}{ds} (u^\nu \bar{g}_{\alpha\nu}) - \frac{m}{2} u^\mu u^\nu \nabla_\alpha \bar{g}_{\mu\nu} + \\ + m \frac{k-1}{2} \nabla_\alpha \Omega^2 + u^\nu \bar{g}_{\alpha\nu} \nabla_\rho (m u^\rho) = 0 .$$

De $u^\alpha \mathcal{L}_\alpha = 0$ nous déduisons la forme de (II.40) :

$$(II.42) \quad \partial_\rho (\sqrt{-g} m \omega^{(2k-1)/k} u^\rho) = 0 .$$

Cette équation est, pour $k = 1/2$ ($h = 1$), l'équation usuelle de conservation de la masse. Quel que soit k , nous pouvons en tirer l'expression du dernier terme de (II.41) ; il est égal au dernier terme de (II.35). Par conséquent, moyennant l'équation de continuité (II.42), (II.35) et (II.41) sont identiques.

Par analogie avec (II.32), nous écrirons (II.26) sous la forme

$$(II.43) \quad \mathcal{L}' = (\bar{m}/\lambda k) \sqrt{-g}^*$$

en définissant $\bar{m}^*$ par

$$(II.44) \quad \bar{m}^* \sqrt{-g}^* = m \omega^2 \sqrt{-g} .$$

En utilisant les autres définitions données au paragraphe II.2.2b, nous pouvons encore transformer (II.41) en

$$(II.45) \quad \nabla_\rho (\bar{m}^* u^\rho u_\alpha) = 0$$

et (II.42) en

$$(II.46) \quad \nabla_\rho (\bar{m}^* u^\rho) = 0 .$$

La « métrique étoilée » nous permet donc finalement d'obtenir des résultats cohérents, que la représentation de la matière soit ponctuelle ou continue, que l'homogénéité du lagrangien soit de degré 1 ou de degré quelconque. Ces résultats eux-mêmes sont formellement très simples : équations de conservation (II.45) et (II.46), équations du mouvement (II.34).

4. *L'analogie entre théorie vectorielle et théorie tensorielle.* - Examinons enfin l'expression des équations de champ et du tenseur d'impulsion-énergie, associés au lagrangien (II.26) et aux équations du mouvement ci-dessus.

a) Du lagrangien (II.26) nous déduisons les équations

$$(II.47) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi} = f \int m \omega^{-2k'/k} ds^* \delta^4(x-z) = f \int m \omega^{(1-2k')/k} ds \delta^4(x-z) , \\ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi_\mu} = f \int m \omega^{-2k'/k} u^\mu ds^* \delta^4(x-z) = f \int m \omega^{-2k'/k} u^\mu ds \delta^4(x-z) , \\ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi_{\mu\nu}} = f \int m \omega^{-2k'/k} u^\mu u^\nu ds^* \delta^4(x-z) = f \int m \omega^{(1-2k')/k} u^\mu u^\nu ds \delta^4(x-z) . \end{array} \right.$$

Pour le tenseur (II.24), dans les trois cas

$$(II.48) \quad \sqrt{-g} t^{(\alpha\beta)} = \sqrt{-g} t^{(m)\alpha\beta} + \int (1 + k' \Omega^2) \omega^{2(1-k)/k} m u^\alpha u^\beta ds^* \delta^4(x-z)$$

ou

$$(II.48') \quad \sqrt{-g} \, t^{\alpha\beta} = \sqrt{-g} \, t^{(m)\alpha\beta} + \int (1 + k' \Omega^2) \omega^{(1-2k)/k} m u^\alpha u^\beta ds \delta^4(x-z).$$

Le coefficient k' est défini par :

$k' = k$ lorsqu'il s'agit du potentiel scalaire,
 $k' = k - \frac{1}{2}$ lorsqu'il s'agit du potentiel vectoriel,
 $k' = k - 1$ lorsqu'il s'agit du potentiel tensoriel.

b) Dans le schéma continu, de même, nous obtenons

$$(II.49) \quad \frac{\delta \mathcal{L}'}{\delta \psi} = f m, \quad \frac{\delta \mathcal{L}'}{\delta \varphi_\mu} = f m u^\mu, \quad \frac{\delta \mathcal{L}'}{\delta \psi_{\mu\nu}} = f m u^\mu u^\nu$$

et, d'après (II.37),

$$(II.50) \quad t^{\alpha\beta} = t^{(m)\alpha\beta} + (1 + k' \Omega^2) m u^\alpha u^\beta.$$

c) Il est donc manifeste que les équations (II.47) et (II.49) d'une part, les tenseurs (II.48) et (II.50) de l'autre, auront des expressions analogues lorsque $k' = 1/2$ ou $k = 1/2$ dans le cas scalaire, $k' = 0$ ou $k = 1/2$ dans le cas vectoriel, $k' = 0$ ou $k = 1$ dans le cas tensoriel.

La valeur intéressante pour la théorie à potentiel vectoriel est donc celle pour laquelle le lagrangien est de degré 1 ; nous avons rappelé que dans ce cas il est possible, dans la représentation ponctuelle, de faire $d\tau = ds$. Pour la théorie tensorielle, au contraire, l'homogénéité de degré 2 semble bien préférable ; le paramètre sera donc ds^* , avec $k = 1 : ds^* = \omega ds$ (dans la représentation ponctuelle).

Ainsi, le choix $d\tau = ds$ avec $k = 1/2$ pour l'une, $d\tau = ds^*$ avec $k = 1$ pour l'autre, semble être la condition qui établit un traitement similaire entre les deux types de théorie et un accord entre les deux méthodes.

Bien entendu, par « théorie vectorielle » nous entendons « théorie de Maxwell ». On sait que le lagrangien correspondant est effectivement de degré 1 ; la force de Lorentz apparaît bien dans les équations du mouvement (et seulement pour $k = 1/2$).

Pour $k = 1/2$ dans un cas, pour $k = 1$ dans l'autre, le second terme de (II.50) est le tenseur d'impulsion-énergie matérielle habituel. Le « tenseur métrique » déduit du lagrangien du champ représente par conséquent, en toute éventualité, l'impulsion-énergie de ce champ. En électromagnétisme, c'est en effet le tenseur de Maxwell.

Remarquons, pour terminer, que dans la théorie scalaire c'est aussi le lagrangien de degré 1 qui semble le plus favorable (cf. [36]) ; mais quel que soit $k (\neq 0)$, il y aura toujours dans (II.50) un terme en Ω^2 . Nous pouvons admettre que ce terme supplée à l'absence d'interaction dans l'expression de $t^{(m)\alpha\beta}$; en effet, pour un potentiel soit vectoriel, soit tensoriel, nous avons vu, d'après (I.34) ou (I.18'), que le tenseur métrique comporte un terme d'interaction ; aucun terme de ce genre

n'existe par contre dans le cas scalaire, le tenseur métrique étant alors identique au tenseur canonique.

III. Théories euclidiennes de la gravitation. Tenseur d'impulsion-énergie gravitationnelle

C'est aux théories tensorielles que nous nous intéressons : rappelons en effet qu'une théorie scalaire ⁽¹⁴⁾ ne peut donner une valeur exacte pour l'avance du périhélie des planètes et qu'une théorie vectorielle ⁽¹⁵⁾ ne peut impliquer qu'une force répulsive entre particules.

Ces deux cas, on le sait, correspondent respectivement aux particules de spins 0 et 1 ; Fierz & Pauli, en les généralisant, ont donné les équations de champs tensoriels qui correspondent à un spin entier quelconque [48]. Selon la voie suggérée par les approximations de la relativité générale, les théories phénoménologiques rigoureuses concernent un tenseur symétrique du second rang, associé à une particule de spin maximum 2 [42, 44, 59, 64].

Malgré la diversité des points de vue de leurs auteurs, nous examinerons brièvement ces théories sous l'angle de la cohérence lagrangienne. Etant donné le rôle que jouent les équations du mouvement, il est possible de classer ces théories selon le mode de déduction de ces équations : trois mécanismes apparaissent : loi de force, loi de conservation, méthode variationnelle.

Il est certain que, quel que soit le mécanisme choisi, on pourra toujours lui reprocher un certain arbitraire.

Nous préférons, en ce qui nous concerne, partir d'une loi de conservation ; l'examen montre toutefois que, dans le cadre de cette déduction, le choix du « tenseur métrique » ne relève pas d'un arbitraire plus déraisonnable que le choix de $\mathcal{L}'$ dans le cas d'autres méthodes.

1. Les théories euclidiennes de la gravitation. — *1. Les retranscriptions de la relativité générale.* — Ces théories ne peuvent se concevoir sans la donnée préliminaire de la relativité générale.

Citons pour mémoire celles qui considèrent l'espace de Minkowski comme une déformation de l'espace de Riemann [40, 62, 63] et dont l'esprit, finalement, est contraire à celui de départ.

Pour les autres, l'espace plat est l'approximation d'ordre 0 de l'espace courbe ; le développement des composantes $g_{\mu\nu}$ de la métrique, autour des valeurs minowskiennes $\eta_{\mu\nu}$ avec lesquelles elles présentent un faible écart, permet d'exprimer toutes les grandeurs comme développements dans l'espace plat et de linéariser les équations.

On pose en première approximation [46]

$$(III.1) \quad g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \psi_{\mu\nu} \quad (\text{et } \eta^{\mu\nu} \psi_{\mu\nu} = \psi).$$

⁽¹⁴⁾ Théorie de Nordström [58] reprise par O. Bergmann [43]. O. Bergmann part d'un lagrangien (II.26) homogène de degré 1 ($k = 1/2$).

⁽¹⁵⁾ Maxwell lui-même a exploré cette possibilité [56].

Ainsi, (I. 27), (I. 28) et (I. 32) deviennent

$$(III.2) \quad G_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} \partial^\nu \psi^{\alpha\beta} \partial_\nu \psi_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \partial^\sigma \psi^{\nu\beta} \partial_\nu \psi_{\beta\sigma} + \frac{1}{2} \partial^\nu \psi_{\nu\alpha} \partial^\alpha \psi - \frac{1}{4} \partial^\alpha \psi \partial_\alpha \psi,$$

$$(III.3) \quad S_{\alpha\beta}^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} [\partial^\lambda_\lambda \psi^{\mu\nu} - (\partial^\nu \psi^\mu_\lambda + \partial^\mu \psi^\nu_\lambda) + \partial^{\mu\nu} \psi + \eta^{\mu\nu} (\partial^{\lambda\rho} \psi_{\lambda\rho} - \partial^\rho_\rho \psi)],$$

$$(III.4) \quad t_{\alpha\beta}^{(c)\nu} = \frac{1}{2} \lambda [(-\partial^\rho \psi^{\sigma\nu} + \frac{1}{2} \partial^\nu \psi^{\rho\sigma} + \frac{1}{2} \eta^{\rho\sigma} \partial^\alpha \psi_\alpha^\nu + \frac{1}{2} \eta^{\nu\rho} \partial^\sigma \psi - \frac{1}{2} \eta^{\rho\sigma} \partial^\nu \psi) \partial_\mu \psi_{\rho\sigma} - \delta_\mu^\nu G_{\alpha\beta}].$$

On peut montrer que $S_{\alpha\beta}^{\mu\nu}$ et $t_{\alpha\beta}^{(c)\nu}$ se déduisent de $G_{\alpha\beta}$ par les formules (I. 14) et (I. 16') (16).

L'invariance, en relativité générale, dans la transformation des $g_{\mu\nu}$ qui résulte d'un changement de coordonnées, se traduit dans la version approchée, par l'invariance de $S_{\alpha\beta}^{\mu\nu}$ dans la transformation

$$(III.5) \quad \psi_{\mu\nu} \rightarrow \psi'_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} + \partial_\mu \chi_\nu + \partial_\nu \chi_\mu$$

(changement de jauge gravitationnelle); si la condition supplémentaire de coordonnées est, en relativité générale, la condition d'isothermie $g^{\mu\nu} \{ \frac{x}{\mu\nu} \} = 0$, la condition de jauge correspondante s'écrit

$$(III.6) \quad \partial^\mu (\psi_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \psi) = 0.$$

De l'identité $\nabla_\mu S_\rho^\mu = 0$, il résulte

$$(III.7) \quad \partial_\mu S_{\rho\alpha\beta}^\mu = 0,$$

[ce que l'on vérifie aisément sur (III. 3)].

Or, ceci, dans le cas d'équations (I. 26), entraîne la conservation de l'énergie matérielle, ce qui est inadmissible (17). Pour définir une loi de conservation et un tenseur d'énergie gravitationnelle, il est nécessaire de pousser l'approximation à l'ordre suivant. C'est ce que font A. Taub [32] et A. Capella [19] par des méthodes différentes; leur tenseur d'impulsion-énergie diffère du tenseur canonique (III. 4) par une divergence antisymétrique, dans le vide seulement, et ne donne une énergie positive que lorsque la condition (III. 6) est vérifiée.

S. N. Gupta [50], pour sa part, développe le lagrangien en série infinie, le premier terme jouant le rôle de lagrangien du champ libre; ainsi apparaît au second membre des équations un tenseur d'énergie en développement infini (18).

2. *Représentation quadridimensionnelle des particules de spin 2.* — Afin de généraliser l'équation scalaire de Klein-Gordon et les équations de Maxwell à des particules de spin entier quelconque et de masse non nulle, M. Fierz & W. Pauli [47, 48] partent d'un potentiel symétrique à f indices $\psi_{\mu\nu\dots\sigma}^{(0)}$ remplissant les conditions

$$(III.8) \quad \psi_{\mu\dots\sigma}^{(0)\mu} = 0,$$

$$(III.9) \quad \partial^\mu \psi_{\mu\dots\sigma}^{(0)} = 0$$

(16) Cf. les expressions obtenues par la méthode du champ varié [20].

(17) A. Papapetrou [26] montre que les équations exactes de la relativité générale peuvent s'écrire sous une forme telle que la partie linéaire soit complétée par le tenseur d'impulsion-énergie gravitationnelle. Cf. aussi [51].

(18) A. Peres [60] propose un choix des variables qui limite le lagrangien à une forme polynomiale.

et vérifiant les équations (avec terme de masse)

$$(III.10) \quad \partial_{\alpha}^{\alpha} \psi_{\mu\nu\dots\sigma}^{(q)} = k^2 \psi_{\mu\nu\dots\sigma}^{(q)}.$$

Les f grandeurs dérivées du potentiel,

$$(III.11) \quad \psi_{[\alpha\beta]\dots}^{(q)} = \partial_{\alpha}^{(q-1)} \psi_{\beta\dots} - \partial_{\beta}^{(q-1)} \psi_{\alpha\dots},$$

sont, par conséquent, telles que

$$(III.12) \quad \partial^{\alpha} \psi_{[\alpha\beta]\dots}^{(q)} = k^2 \psi_{\beta\dots}^{(q-1)}.$$

En vertu de ces équations, les tenseurs symétriques de type maxwellien

$$(III.13) \quad T_{\mu}^{(q)\nu} = \psi_{[\rho\sigma]\dots[\tau\mu]\dots\lambda}^{(q)} \psi_{[\rho\sigma]\dots[\tau\nu]\dots\lambda}^{(q)} - \frac{1}{2} \partial_{\mu}^{\nu} \psi_{[\rho\sigma]\dots\lambda} \psi^{[\rho\sigma]\dots\lambda} + \\ + k^2 \left(\psi_{[\rho\sigma]\dots\tau\mu}^{(q-1)} \psi^{(q-1)[\rho\sigma]\dots\tau\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\nu} \psi_{[\rho\sigma]\dots\tau}^{(q-1)} \psi^{(q-1)[\rho\sigma]\dots\tau} \right)$$

sont conservatifs et définissent une énergie totale positive.

Dans le cas où $f = 2$, Fierz & Pauli reconnaissent la nature gravitationnelle du champ associé, par comparaison aux équations d'Einstein approchées, assorties de la condition d'isothermie.

M.-A. Tonnelat arrive aux mêmes équations [65] en appliquant la méthode de fusion de L. de Broglie à la particule de spin total maximum 2; le procédé fournit trois groupes d'équations, décrivant respectivement l'état de spin 0, l'état de spin 1 (équations de Maxwell) et l'état de spin 2. Ce dernier groupe, qui dépend d'un potentiel symétrique $\psi_{\mu\nu}$, s'écrit

$$(III.14) \quad \partial^{\rho} \psi_{[\rho\mu]\nu} = k^2 \psi_{\mu\nu},$$

avec

$$\partial_{\mu} \psi_{\nu\rho} - \partial_{\nu} \psi_{\mu\rho} = \psi_{[\mu\nu]\rho}.$$

De (II.14), il résulte

$$(III.15) \quad \partial^{\mu} \psi_{\mu\nu} = 0.$$

La condition de trace nulle (III.8) n'est pas indispensable; lorsqu'elle n'est pas imposée, les équations précédentes décrivent un mélange de spins 2 et 0, que l'on sépare aisément en posant

$$(III.16) \quad \psi_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu}^{(0)} + \psi_{\mu\nu}^{(2)}, \quad \text{où} \quad \gamma^{\mu\nu} \psi_{\mu\nu}^{(2)} = 0.$$

Les équations (III.14) ont pu servir de base à une tentative de théorie euclidienne de la gravitation [53, 66]. Cependant, à moins d'introduire au second membre un tenseur d'énergie gravitationnelle, elles ne peuvent être considérées que comme l'approximation linéaire d'une théorie rigoureuse non linéaire.

Le tenseur (III.13), associé au champ $\psi_{[\mu\nu]\rho}$ s'écrit (si $k \simeq 0$)

$$(III.17) \quad T_{\mu}^{\nu} = \psi_{[\mu\rho]\sigma} \psi^{[\nu\rho]\sigma} - \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\nu} \psi_{[\rho\sigma]\lambda} \psi^{[\rho\sigma]\lambda}.$$

Or les équations $\partial_{\rho}^{\rho} \psi^{\mu\nu} + \tau (\partial^{\rho\nu} \psi_{\rho}^{\mu} + \partial^{\nu\rho} \psi_{\rho}^{\mu}) = 0$, qui s'écrivent

$$\text{pour } \tau = 0, \quad \partial^{\rho} \psi^{\mu\nu} = 0,$$

$$\text{pour } \tau = -1/2, \quad \partial_{\rho} (\psi^{[\rho\mu]\nu} + \frac{1}{2} \psi^{[\mu\nu]\rho}) = 0$$

et sont équivalentes à (III.14) si (III.15) est admis, dérivent du lagrangien

$$(III.18) \quad L = \frac{1}{2} \partial^{\mu} \psi^{\rho\sigma} \partial_{\mu} \psi_{\rho\sigma} + \tau \partial^{\mu} \psi^{\rho\sigma} \partial_{\rho} \psi_{\mu\sigma}.$$

Le tenseur canonique associé est donc

$$l^{(\tau)\mu\nu} = \partial^{\mu} \psi^{\rho\sigma} \partial^{\nu} \psi_{\rho\sigma} - \frac{1}{2} \gamma^{\mu\nu} \partial^{\alpha} \psi^{\rho\sigma} \partial_{\alpha} \psi_{\rho\sigma} \quad (\lambda = 2)$$

pour $\tau = 0$ et, pour $\tau = -1/2$,

$$t^{(c)\mu\nu} = \psi^{[\nu\rho]\sigma} \partial^\mu \psi_{\rho\sigma} - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} \psi^{[\alpha\beta]\rho} \psi_{[\alpha\beta]\rho}.$$

Le tenseur métrique, lui, comprend des termes supplémentaires qui sont des produits des potentiels par leurs dérivées secondes.

3. Equations du mouvement et loi de force. — Le potentiel $\psi_{\mu\nu}$ est aussi assujéti aux équations en dalembertien

$$(III.19) \quad \partial^\mu_\mu \psi_{\rho\sigma} = M_{\rho\sigma}$$

dans la théorie de G. D. Birkhoff [44] ; mais le mouvement résulte de la donnée d'une loi de force

$$(III.20) \quad m \, du^\nu/ds = m \, u_\mu u_\rho (\partial^\nu \psi^{\mu\rho} - \dot{c}^\mu \psi^{\nu\rho}).$$

On sait que cette théorie a soulevé de nombreuses objections [41, 69] dont nous retiendrons ici la suivante : les équations du mouvement adoptées ne peuvent pas se rattacher au lagrangien d'où découle (III.19) ; elles ne correspondent à aucune loi de conservation énergétique [41].

Les équations de champ (III.19), en effet, proviennent du lagrangien (III.18) où $\tau = 0$; les tenseurs canonique et métrique correspondants ont pour divergence, moyennant (III.19) et (III.15),

$$(III.21) \quad \partial_\sigma t^{(c)\nu\sigma} = m \, u_\sigma u_\rho \dot{c}^\nu \psi^{\sigma\rho},$$

$$(III.22) \quad \partial_\sigma t^{(m)\nu\sigma} = m \, u_\sigma u_\rho (\partial^\nu \psi^{\sigma\rho} - 2 \, \dot{c}^\sigma \psi^{\nu\rho}).$$

Le second membre de (III.20) est, au contraire, la divergence de (III.17) si $M_{\rho\sigma} = m \, u_\rho u_\sigma$. Ce n'est pas cette forme, d'ailleurs, qu'a pour Birkhoff le second membre de (III.19) ; afin d'obtenir des prévisions expérimentales correctes [57] il est amené à choisir une équation d'état qui prête à controverses.

4. Equations du mouvement et loi de conservation. — C'est encore l'équation en dalembertien qui régit le potentiel de gravitation dans la théorie d'A. Papapetrou [59] ; mais l'expression de la force gravitationnelle s'obtient par l'intermédiaire d'une loi de conservation de l'énergie. Le tenseur d'impulsion-énergie du champ gravifique est le tenseur canonique

$$t^{(c)\beta}_\alpha = \partial_\alpha \psi_{\mu\nu} \partial^\beta \psi^{\mu\nu} + \nu \, \partial_\alpha \psi \, \partial^\beta \psi - \frac{1}{2} \delta_\alpha^\beta (\partial_\rho \psi_{\mu\nu} \partial^\rho \psi^{\mu\nu} + \nu \, \partial_\rho \psi \, \partial^\rho \psi)$$

déduit du lagrangien

$$L = \frac{1}{2} \partial_\gamma \psi_{\alpha\beta} \partial^\gamma \psi^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \nu \, \partial^\gamma \psi \, \partial_\gamma \psi.$$

Or, à L devraient correspondre les équations $\partial^\rho_\rho \psi_{\mu\nu} - \nu \, \eta_{\mu\nu} \partial^\rho_\rho \psi = M_{\mu\nu}$. Il n'est pas possible de faire $\nu = 0$, cette valeur étant exclue par les conclusions de l'auteur. Celui-ci, d'ailleurs, n'obtient pas la valeur observable de l'avance du périhélie des planètes.

Dans cette théorie, les équations du mouvement sont les suivantes :

$$m \, du^\nu/ds = -m \, u^\rho u^\mu (g^{\nu\sigma} - u^\nu u^\sigma) \partial_\sigma (\psi_{\rho\mu} + \nu \, \eta_{\rho\mu} \psi).$$

5. Equations du mouvement et déduction lagrangienne. — Pour obtenir, par déduction variationnelle, des équations de champ qui ne comprennent pas unique-

ment le terme en dalembertien, il nous faut adopter, comme lagrangien, la forme quadratique la plus générale des dérivées des potentiels.

Nous l'écrivons, en coordonnées quelconques,

$$(III.23) \quad \mathcal{L} = \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} \nabla_{\mu} \psi_{\rho\sigma} \nabla^{\mu} \psi^{\rho\sigma} + \tau \nabla^{\mu} \psi^{\rho\sigma} \nabla_{\rho} \psi_{\mu\sigma} + \right. \\ \left. + \sigma \nabla^{\mu} \psi_{\mu\rho} \nabla_{\sigma} \psi^{\sigma\rho} + \gamma \nabla^{\nu} \psi_{\nu\rho} \nabla^{\rho} \psi + \frac{1}{2} \nu \nabla^{\rho} \psi \nabla_{\rho} \psi \right),$$

d'où le premier membre des équations de champ

$$(III.24) \quad A^{\mu\nu} = - \left[\nabla^{\rho} \psi^{\mu\nu} + (\tau + \sigma) (\nabla^{\mu} \psi^{\nu\rho} + \nabla^{\nu} \psi^{\mu\rho}) + \nu g^{\mu\nu} \nabla^{\rho} \psi + \right. \\ \left. + \gamma (g^{\mu\nu} \nabla_{\rho} \psi^{\rho\sigma} + \nabla^{\mu} \psi^{\nu}) \right];$$

τ , σ , γ , ν , sont des coefficients numériques que les vérifications expérimentales pourront déterminer ; en leur donnant des valeurs particulières, nous retrouvons les lagrangiens mentionnés jusqu'ici.

En particulier, si ces coefficients sont tels que $A^{\mu\nu}$ jouisse d'une invariance dans certaine transformation des potentiels, et dans ce cas seulement, il est possible d'imposer aux potentiels une condition supplémentaire, sans introduire d'équations surabondantes.

Dans le cas où l'on a à la fois

$$(III.25) \quad \tau + \sigma + 1 = 0, \quad \gamma + \nu = 0, \quad \nu + 1 = 0$$

(et dans ce cas uniquement), la divergence de $A^{\mu\nu}$ est identiquement nulle ; on se retrouve nécessairement devant les équations d'Einstein approchées (III.2) et (III.3). L'ensemble de valeurs (III.25) est à éliminer, puisqu'il en résulterait la conservation de la seule énergie matérielle ⁽¹⁹⁾.

Remarquons que les second et troisième termes du lagrangien (III.23) ont la même contribution à l'expression de $A^{\mu\nu}$. Leur différence, en effet, est une divergence ; on sait qu'un terme de ce genre n'influe pas sur les équations aux variations. Il en résulte qu'il n'influe pas sur les divergences de ^(m) (t) et de ^(c) (t) . Par contre, il modifie l'expression même de ces tenseurs.

W. E. Thirring d'un côté, F. J. Belinfante de l'autre, développent leur théorie à partir d'un lagrangien (III.23) ; ils lui ajoutent le lagrangien $-\mathcal{L}'$ qui leur fournit les équations du mouvement.

W. E. Thirring [64] adopte d'emblée le cas représenté par (III.25) pour $\mathcal{L}$ et, pour $\mathcal{L}'$, l'expression (II.26) avec $n = k = 1$, mais $d\tau = ds$. Le premier choix implique que la théorie tend asymptotiquement vers la relativité générale. Le second entraîne les lois du mouvement (II.29) et la relation contestable (II.30). D'ailleurs, la valeur de l'avance du périhélie ainsi calculée est supérieure à la valeur observée.

F. J. Belinfante & J. C. Swihart [42], au contraire, éliminent (III.25) comme nous le préconisons. Cependant, leur lagrangien comprend un terme de couplage scalaire dont la justification n'est pas satisfaisante. Un terme de ce genre, signalons-le, apparaîtra de lui-même dans une généralisation de (II.26) à un formalisme pentadimensionnel ; il n'introduira pas toutefois de constante supplémentaire, comme c'est le cas pour Belinfante.

⁽¹⁹⁾ S. N. Gupta [49] propose, à partir de ce cas, une théorie non linéaire, en construisant le lagrangien par termes successifs ; mais l'interprétation d'une théorie de ce type nécessite encore la donnée préalable de la relativité générale.

2. **Le tenseur « métrique » comme tenseur d'impulsion-énergie.** — Malgré la diversité des processus par lesquels peuvent s'obtenir les lois du mouvement, il est donc une exigence que toute théorie se devrait de satisfaire et qui n'est réellement remplie par aucune des précédentes : afin qu'équations du champ déduites d'un lagrangien et équations du mouvement forment un ensemble cohérent, il est souhaitable que ces dernières puissent s'accorder avec la définition d'une énergie conservative, rattachée au lagrangien.

Nous avons déjà rappelé qu'une telle loi de conservation ne peut être la conséquence directe de l'existence d'un lagrangien pour le champ libre, comme c'est le cas en relativité générale. Nous allons voir néanmoins que c'est en misant sur le « tenseur métrique » par comparaison au formalisme maxwellien, que le formalisme même et les résultats vérifiables se rapprocheront le plus de ceux de la relativité générale.

Nous savons que c'est également le tenseur métrique que met en évidence l'usage du lagrangien total $\mathcal{L} - \mathcal{L}'$. L'arbitraire dans ce cas n'est plus dans le choix du tenseur d'impulsion-énergie, que les identités imposent ; il réside dans la forme même de $\mathcal{L}'$. Les résultats obtenus ici seront néanmoins en complet accord avec les conclusions du paragraphe II.2.

1. **Tenseur « métrique » et équations du mouvement.** — Rappelons quelques identités vues au chapitre I, déduites du seul lagrangien $\mathcal{L}$:

en relativité générale,

$$(I.20) \quad \partial_\mu (\sqrt{-g} \, t_\rho^{(\epsilon)\mu}) = -\frac{1}{2} \lambda \sqrt{-g} \, A^{\mu\nu} \partial_\rho g_{\mu\nu};$$

dans une théorie euclidienne phénoménologique

$$(I.20') \quad \nabla_\mu t_\rho^{(\epsilon')\mu} = -\frac{1}{2} \lambda A^{\mu\nu} \nabla_\rho \psi_{\mu\nu},$$

$$(I.19') \quad \nabla_\mu t_\rho^{(m)\mu} = -\frac{1}{2} \lambda A^{\mu\nu} \nabla_\rho \psi_{\mu\nu} + \lambda \nabla_\mu (A^{\mu\nu} \psi_{\rho\nu}).$$

A première vue, l'analogie entre (I.20) et (I.20') est la plus frappante et favorise le tenseur « canonique ». Or, ces deux relations peuvent encore s'écrire

$$(III.26) \quad \partial_\mu (\sqrt{-g} \, t^{(\epsilon)\mu}_{\nu\rho} g_{\nu\rho}) = -\frac{1}{2} \lambda \sqrt{-g} \, A^{\mu\nu} \partial_\rho g_{\mu\nu},$$

$$(III.27) \quad \nabla_\mu (t^{(\epsilon')\mu}_{\nu\rho} g_{\nu\rho}) = -\frac{1}{2} \lambda A^{\mu\nu} \nabla_\rho \psi_{\mu\nu},$$

où l'analogie est nettement superficielle ; les potentiels de gravitation ($g_{\mu\nu}$ pour la première relation, $\psi_{\mu\nu}$ pour la seconde) n'y jouent manifestement pas le même rôle.

On obtient, au contraire, le même balancement que dans (III.26) en partant du « tenseur métrique » et de (I.19'). Posons, en effet,

$$(III.28) \quad \nabla_\mu (M_\rho^{(\epsilon')\mu} + M_\rho^{(\epsilon)\mu}) = 0,$$

où $M_\rho^{(\epsilon)\mu}$ est le second membre des équations de champ (I.26). Ainsi, avec (I.19'),

$$(III.29) \quad \nabla_\mu (M_\rho^{(\epsilon')\mu} + \lambda M^{\nu\mu} \psi_{\nu\rho}) = \frac{1}{2} \lambda M^{\mu\nu} \nabla_\rho \psi_{\mu\nu}$$

et si nous posons

$$(III.30) \quad g_{\rho\nu}^* = g_{\rho\nu} + \lambda \psi_{\rho\nu},$$

nous obtenons

$$(III.31) \quad \nabla_\mu (M^{\nu\mu} g_{\nu\rho}^*) = \frac{1}{2} M^{\mu\nu} \nabla_\rho g_{\mu\nu}^*,$$

tandis que (III.26) équivaut à

$$\partial_\mu(\sqrt{-g} M^{\nu\mu} g_{\nu\rho}) = \frac{1}{2} \sqrt{-g} M^{\nu\mu} \partial_\rho g_{\mu\nu}.$$

Considérons donc $g_{\mu\nu}^*$ comme une nouvelle métrique qui se réduit à une métrique euclidienne en l'absence de gravitation [68]. Le symbole $\overset{*}{\nabla}$ dénotera la dérivation covariante dans cette métrique.

Nous définissons alors le tenseur matériel « étoilé »

$$(III.32) \quad \overset{*}{M}^{\mu\nu} \backslash \quad \overset{*}{g}_{\mu\nu} \quad \overset{*}{M}^{\mu\nu} \backslash \quad -g$$

de façon que (III.31) donne

$$(III.33) \quad \overset{*}{\nabla}_\mu \overset{*}{M}^\mu_\rho = 0.$$

Ainsi pouvons-nous définir $\overset{*}{M}^{\mu\nu}$ comme $M^{\mu\nu}$ l'est par (II.14), c'est-à-dire définir un vecteur $\overset{*}{u}^\mu$, unitaire dans la métrique étoilée,

$$(III.34) \quad \begin{aligned} \overset{*}{M}^{\mu\nu} &= m c^2 \overset{*}{u}^\mu \overset{*}{u}^\nu, & \overset{*}{u}^\mu &= dx^\mu/ds^*, \\ ds^{*2} &= g_{\mu\nu}^* dx^\mu dx^\nu, & g_{\mu\nu}^* \overset{*}{u}^\mu \overset{*}{u}^\nu &= 1. \end{aligned}$$

Il faut donc ⁽²⁰⁾

$$(III.35) \quad \overset{*}{u}^\mu = u^\mu/\omega, \quad \sqrt{-g} \overset{*}{m} = \sqrt{-g} m \omega^2, \text{ où } \omega^2 = g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu.$$

Le parallèle formel avec la relativité générale est complet : (III.33), avec (III.34), entraîne à la fois :

l'équation de continuité

$$(III.36) \quad \overset{*}{\nabla}_\rho (\overset{*}{m} \overset{*}{u}^\rho) = 0,$$

les équations du mouvement

$$(III.37) \quad \overset{*}{u}^\mu \overset{*}{\nabla}_\mu \overset{*}{u}^\nu = 0.$$

Les trajectoires sont les géodésiques de la métrique ds^* : on peut dire aussi que le champ de gravitation a doté l'espace d'un « indice » ω .

Nous avons donc les mêmes résultats qu'au chapitre II, équations (II.34) et (II.46), avec $k = 1$ comme nous l'avions conclu.

Les équations (III.37) et (III.36) se traduisent avec les grandeurs non étoilées par

$$(III.38) \quad \omega u^\mu \partial_\mu [(u_\nu + \lambda \psi_{\nu\rho} u^\rho)/\omega] = \frac{1}{2} u^\mu u^\sigma \partial_\nu (g_{\mu\sigma} + \lambda \psi_{\mu\sigma}),$$

$$(III.39) \quad \partial_\rho (\sqrt{-g} m \omega u^\rho) = 0.$$

De (III.38) nous pouvons déduire l'expression de la force gravitationnelle

$$m du^\nu/ds = -m u^\rho u^\mu g^{\nu\sigma} [(\partial_\rho g_{\mu\sigma}^* - \frac{1}{2} \partial_\sigma g_{\mu\rho}^*) - g_{\rho\sigma}^* \partial_\mu \text{Log } \omega],$$

alors qu'en relativité générale

$$m du^\nu/ds = -m u^\rho u^\mu g^{\nu\sigma} (\partial_\rho g_{\mu\sigma} - \frac{1}{2} \partial_\sigma g_{\mu\rho}).$$

L'équation (III.39) est une équation de conservation pour la masse $m \omega$ [52].

Nous voyons que ces résultats dépendent uniquement :

du choix d'un lagrangien vérifiant la condition (I.4) ;

de l'adoption du « tenseur métrique » associé comme tenseur d'impulsion-énergie du champ.

Encore faut-il confirmer la validité de ce tenseur en étudiant les conséquences des équations (III.33) : c'est alors qu'intervient la forme explicite du lagrangien.

⁽²⁰⁾ Les indices sont éventuellement abaissés à l'aide de $g_{\mu\nu}^*$; on peut définir $g^{\mu\nu}$ par $g^{\mu\nu} g_{\nu\rho}^* = \delta_\rho^\mu$.

On montre qu'avec un lagrangien tel que (III.23), il est possible de choisir les coefficients $\tau, \dots$ ⁽²¹⁾ de façon à obtenir des prévisions expérimentales correctes [54, 67].

Si, au contraire, l'on part du tenseur canonique ou d'une combinaison linéaire de t et t' (cf. [61]), l'expression des lois du mouvement est loin d'être aussi satisfaisante que (III.37) et l'on n'aboutit à aucune équation de continuité.

Le « tenseur métrique » a, de plus, l'avantage d'être symétrique ; il est possible de formuler la conservation du moment angulaire selon (II.3) ; avec le tenseur canonique, on n'aurait (II.4) que dans le vide, tandis qu'une formulation par le biais d'une définition telle que (II.10) n'est pas utilisable ⁽²²⁾.

Notons que, dans le cas de l'expression (II.73) du lagrangien, le tenseur canonique peut lui-même être symétrique, à condition que $\sigma = \tau = \gamma = 0$. Cela est donc réalisé, en particulier, pour l'équation en dalembertien.

Nous avons finalement montré comment accorder entre elles les méthodes qui se présentent :

donnée d'un lagrangien du champ pur et d'une *loi de conservation de l'énergie* totale, d'où dérivent respectivement le premier membre des équations du champ et les équations du mouvement ;

donnée préalable d'un lagrangien total, d'où dérivent à la fois, par un *principe variationnel*, équations du champ et équations du mouvement.

Le tenseur d'impulsion-énergie du champ de gravitation est le « tenseur métrique » associé au lagrangien de ce champ. Il nous reste à calculer ce tenseur.

2. Expression du tenseur métrique. — Nous avons dit qu'en pratique le lagrangien $\mathcal{L}$ est la somme de tous les invariants possibles, quadratiques par rapport aux dérivées premières des potentiels. Nous pouvons supposer qu'il ne dépend des potentiels eux-mêmes que par l'intermédiaire des termes où entrent des symboles de Christoffel, dans l'expression des dérivées covariantes.

Autrement dit, nous pouvons écrire, soit

$$(III.40) \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}(\partial_\alpha \psi_{\lambda\mu}, \psi_{\rho\sigma}, \dots),$$

soit

$$(III.40') \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}(\nabla_\alpha \psi_{\lambda\mu}, \psi_{\rho\sigma}, \dots).$$

Or, le premier membre des équations de champ se définit, par rapport à (III.40), par

$$(III.41) \quad A^{\mu\nu} \sqrt{-g} = \sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{\mu\nu}} - \partial_\alpha \left(\sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \psi_{\mu\nu})} \right).$$

Posons

$$(III.42) \quad A^{\alpha, \mu\nu} = \partial \mathcal{L} / \partial (\partial_\alpha \psi_{\mu\nu}) \quad (A^{\alpha, \mu\nu} = A^{\alpha, \nu\mu});$$

donc

$$(III.42') \quad A^{\alpha, \mu\nu} = \partial \mathcal{L} / \partial (\nabla_\alpha \psi_{\mu\nu}).$$

⁽²¹⁾ Les résultats n'excluent pas l'équation en dalembertien [55, 45] mais imposent dans ce cas une équation d'état.

⁽²²⁾ On peut constater que W. E. Thirring [64], que son choix initial du tenseur canonique ne satisfait pas, aboutit finalement au tenseur métrique, avec la décomposition exprimée par (I.18'), ceci sans passer explicitement par son lagrangien total $\mathcal{L} - \mathcal{L}'$.

Il vient

$$\frac{\partial L}{\partial \psi_{\mu\nu}} = - \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \lambda \rho \end{matrix} \right\} A^{\rho, \lambda, \nu} - \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \lambda \rho \end{matrix} \right\} A^{\rho, \lambda, \mu}$$

et, en portant dans (III.41), on constate que l'on a plus simplement

$$(III.41') \quad A^{\mu\nu} = - \nabla_\alpha A^{\alpha, \mu\nu}.$$

Avec les hypothèses faites sur ℓ , la définition (III.42') permet encore d'écrire

$$(III.43) \quad L = \frac{1}{2} A^{\alpha, \mu\nu} \nabla_\alpha \psi_{\mu\nu}$$

et

$$(III.44) \quad t^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \lambda (A^{\nu, \rho\sigma} \nabla^\mu \psi_{\rho\sigma} - g^{\mu\nu} L).$$

Par l'intermédiaire de la relation (I.18'), il est possible de calculer le « tenseur métrique » plus agréablement qu'en partant de la définition (I.15) : nous allons voir ⁽²³⁾ que le « tenseur métrique » s'exprime uniquement à l'aide de $A^{\alpha, \mu\nu}$.

En effet, $\gamma^{\rho\sigma, \nu}$ étant défini par (I.17), posons

$$(III.45) \quad \gamma^{\rho\sigma, \rho} \equiv \gamma^{\rho\sigma, \tau} - \gamma^{\rho\tau, \sigma} \quad (\gamma^{\rho\sigma, \tau} = g^{\tau\nu} \gamma^{\rho\sigma, \nu}),$$

ce qui entraîne réciproquement $\gamma^{\rho\sigma, \tau} = \frac{1}{2} (\gamma^{\rho\tau, \rho} + \gamma^{\rho\sigma, \tau} - \gamma^{\rho\tau, \sigma})$. En portant (I.17) dans (III.45), nous constatons que

$$\gamma^{\rho\sigma, \rho} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho \psi_{\sigma\mu})} \psi^\tau_\mu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\tau \psi_{\rho\mu})} \psi^\sigma_\mu.$$

c'est-à-dire que les dérivations par rapport aux $\partial_\rho g_{\mu\nu}$ disparaissent de l'expression de $\gamma^{\rho\sigma, \tau}$:

$$\gamma^{\rho\sigma, \tau} = \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho \psi_{\sigma\mu})} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma \psi_{\rho\mu})} \right] \psi^\tau_\mu + \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\tau \psi_{\sigma\mu})} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma \psi_{\tau\mu})} \right] \psi^\rho_\mu - \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\tau \psi_{\rho\mu})} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho \psi_{\tau\mu})} \right] \psi^\sigma_\mu \right\}.$$

A l'aide de cette dernière relation et de (III.42'), (I.18') donne finalement ⁽²⁴⁾

$$(III.46) \quad t^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \lambda \{ A^{\alpha, \beta\gamma} \nabla^\mu \psi_{\beta\gamma} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} A^{\alpha, \beta\gamma} \nabla_\alpha \psi_{\beta\gamma} + 2 A^{\alpha, \sigma\rho} \nabla_\alpha \psi^\nu_\rho - \nabla_\rho [(A^{\rho, \sigma\mu} + A^{\sigma, \rho\mu}) \psi^\nu_\mu - (A^{\nu, \sigma\mu} + A^{\sigma, \nu\mu}) \psi^\rho_\mu + (A^{\rho, \nu\mu} + A^{\nu, \rho\mu}) \psi^\sigma_\mu] \}.$$

On remarque dans cette expression, à côté des termes de type maxwellien, des produits des potentiels par leurs dérivées secondes : ces termes subsistent même dans le cas du vide.

Il n'existe pas de termes de ce genre dans le tenseur de Maxwell ; ils proviennent en effet, des dérivées $\partial^\ell \ell / \partial g_{\alpha\beta}$ qui sont nulles pour le lagrangien de l'électromagnétisme.

En effet, avec les hypothèses (I.33), le tenseur métrique s'écrit, dans le cas vectoriel,

⁽²³⁾ en notant une remarque de L. Rosenfeld dans [10], p. 15.

⁽²⁴⁾ Le tenseur d'A. Capella, par exemple [19], s'écrit, avec nos notations,

$$\begin{aligned} t^{\mu\nu} = & \lambda (\psi^\rho_\alpha A^{\alpha\rho} + \psi^\rho_\beta A^{\alpha\rho}) + \frac{3}{4} \lambda \psi A_{\alpha\beta} + \\ & + \frac{1}{2} \lambda \nabla_\rho (2 \psi^\rho_\mu \nabla^\mu \psi'_{\alpha\beta} - \psi'_{\beta\mu} \nabla^\mu \psi^\rho_\alpha - \psi_{\alpha\mu} \nabla^\mu \psi'^\rho_\beta), \\ \psi'_{\alpha\beta} = & \psi_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \psi. \end{aligned}$$

où

$$t_{\mu}^{(m)\rho} = \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\partial L}{\partial \nabla_{\rho} \varphi_{\nu}} \varphi_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\rho} \frac{\partial L}{\partial \nabla_{\sigma} \varphi_{\nu}} \nabla_{\sigma} \varphi_{\nu} \right).$$

Pour un potentiel scalaire, le lagrangien est bien déterminé et l'équation du champ est celle de Klein-Gordon. Tenseur métrique et tenseur canonique sont identiques (au signe près) :

$$(III.47) \quad t^{(m)\mu\nu} = -\lambda (\nabla^{\mu} \psi \nabla^{\nu} \psi - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_{\rho} \psi \nabla^{\rho} \psi).$$

IV. Formalisme pentadimensionnel. La particule de spin total maximum 2

Nous venons d'étudier la possibilité d'édifier une théorie euclidienne du champ de gravitation, qui ne se réduise pas à une approximation linéaire de la relativité générale. Nous avons souligné comment éviter certaines contradictions en ce qui concerne les équations du mouvement et les lois de conservation.

L'analogie entre gravitation et électromagnétisme, qui est en grande partie à l'origine des hypothèses du chapitre précédent, peut encore mener sur une autre voie : recherche d'une théorie unitaire où les deux phénomènes résultent d'un seul hyperchamp.

Dans l'espace riemannien à cinq dimensions, cette unification est réalisée par la théorie de Jordan et Thiry, qu'a inspirée l'étude des trajectoires relativistes des particules chargées. Les principes de Maupertuis et de Fermat prennent alors la forme générale d'un principe des géodésiques dans l'espace pentadimensionnel.

Les équations approchées de cette théorie donnent un exemple de formalisme euclidien approché. Une représentation pentadimensionnelle possible des particules de spin total maximum 2 permet de retrouver les mêmes équations.

Tout ici, peut-on dire, procède de la même démarche : retranscription, dans l'espace à cinq dimensions, d'équations ou de principes déjà éprouvés dans l'espace-temps, méthode qui sera employée pour accéder à un formalisme pentadimensionnel qui ne soit pas approché. Nous ferons donc encore largement usage des résultats exposés dans les chapitres précédents.

1. Les trajectoires des particules d'épreuve en théorie de Jordan et Thiry. — Commençons par rappeler quelques résultats de relativité générale, dont les théorèmes de la théorie unitaire sont la transposition.

1. Les particules neutres en relativité générale. — Une particule neutre, libre dans l'espace-temps de Riemann V_4 , c'est-à-dire soumise au seul champ de gravitation, décrit les géodésiques de V_4 , d'équation

$$(IV.1) \quad \delta \int ds = \delta \int \Lambda d\tau = 0,$$

si $\Lambda = \sqrt{g_{\alpha\beta} \dot{x}^{\alpha} \dot{x}^{\beta}}$. Les rayons électromagnétiques, trajectoires du photon, sont les géodésiques de longueur nulle, si l'indice n du milieu est égal à 1.

Lorsque $n \neq 1$, on associe à V_4 l'espace V_4 de métrique [86]

$$(IV.2) \quad \bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) u_\mu u_\nu,$$

dont les rayons électromagnétiques sont les géodésiques de longueur nulle. En supposant permanent le mouvement du milieu, on montre [85], par projection sur l'espace V_3 , que ce théorème généralise le principe de Fermat.

2. *Champs et inductions électromagnétiques.* — Les équations (IV.1) sont une conséquence des équations d'Einstein pour le schéma matière pure. On sait que lorsqu'il existe, un champ électromagnétique ajoute simplement ses équations à celles d'Einstein.

Dans le vide, les équations de Maxwell se déduisent du lagrangien que nous avons déjà écrit

$$(IV.3) \quad L = \frac{1}{4} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \varphi_{\mu\nu} \varphi_{\rho\sigma}.$$

La relation

$$(IV.4) \quad \partial L / \partial (\nabla_\rho \varphi_\nu) = \varphi^{\mu\nu}$$

peut être considérée comme une définition de $\varphi_{\mu\nu}$.

En présence de sources, il est préférable de remplacer les champs par les inductions ; le lagrangien précédent est alors remplacé par

$$(IV.5) \quad \bar{L} = \frac{1}{4\mu} \bar{g}^{\mu\rho} \bar{g}^{\nu\sigma} \varphi_{\mu\nu} \varphi_{\rho\sigma}.$$

(Le tenseur $\bar{g}^{\mu\rho}$ est tel que $\bar{g}^{\mu\rho} \bar{g}_{\rho\nu} = \delta^\mu_\nu$, donc

$$(IV.6) \quad \bar{g}^{\mu\rho} = g^{\mu\rho} + (n^2 - 1) u^\mu u^\rho.)$$

La relation telle que (IV.4)

$$(IV.7) \quad \partial \bar{L} / \partial (\nabla_\rho \varphi_\nu) = f^{\rho\nu}$$

définit alors l'induction $f^{\rho\nu}$ qui a pour expression [86]

$$(IV.8) \quad f^{\rho\nu} = \frac{1}{\mu} \bar{g}^{\mu\rho} \bar{g}^{\sigma\nu} \varphi_{\mu\sigma}.$$

Le premier membre des équations de Maxwell devient $\epsilon f^{\rho\nu}$. La relation (IV.8) entraîne, en particulier,

$$(IV.9) \quad f^{\mu\nu} u_\nu = \epsilon \varphi^{\mu\nu} u_\nu, \\ f_{\mu\nu} u_\rho + f_{\nu\rho} u_\mu + f_{\rho\mu} u_\nu = \frac{1}{\mu} (\varphi_{\mu\nu} u_\rho + \varphi_{\nu\rho} u_\mu + \varphi_{\rho\mu} u_\nu),$$

relations qui remplacent les équations de liaison classiques, valables seulement dans le système propre.

3. *Les particules chargées en relativité générale.* — Les équations (IV.1) sont équivalentes à la loi de conservation du tenseur d'impulsion-énergie matérielle ; lorsqu'il existe un champ électromagnétique, la loi de conservation porte sur la somme de ce tenseur et du tenseur de Maxwell. Les trajectoires des particules chargées (de charge e) sont les lignes qui réalisent l'extremum de l'intégrale

$$(IV.10) \quad \int m \left(\sqrt{g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta} + \frac{e}{m} \varphi_\mu \dot{x}^\mu \right) d\tau.$$

Avec les notations du chapitre II, ce sont les géodésiques de la « métrique »

* $g_{\alpha\beta}$ [cf. (II.33), (II.27) et (II.28)], avec $k = 1/2, \lambda = 2, f = e/m$. Il faut admettre qu'à chaque valeur de e/m correspond une métrique différente.

4. *Les trajectoires des particules en théorie de Jordan et Thiry.* — Il est manifestement préférable de pouvoir considérer ces lignes comme géodésiques d'un espace unique et c'est le cas dans la théorie de Jordan et Thiry [88].

Le principe des géodésiques est postulé dans une variété riemannienne V_5 à cinq dimensions dont la métrique $dS^2 = \gamma_{MN} dx^M dx^N$ ⁽²⁵⁾ est de type hyperbolique normal (— — — + —).

Les conditions auxquelles V_5 est assujettie entraînent l'existence d'un système de coordonnées tel que

$$(IV.11) \quad \partial_5 \gamma_{MN} = 0, \quad \gamma_{55} < 0,$$

une section $x^5 = \text{Cte}$ peut être identifiée à l'espace-temps de la relativité générale et les géodésiques de V_5 s'y projettent suivant les lignes (IV.10) si l'on a posé

$$(IV.12) \quad g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - (\gamma_{\mu 5} \gamma_{\nu 5} / \gamma_{55}) \quad (\text{donc } g^{\mu\nu} = \gamma^{\mu\nu}),$$

$$(IV.13) \quad \varphi_\mu = \frac{1}{\beta} \frac{\gamma_{5\mu}}{\gamma_{55}} \quad (\beta, \text{coefficient numérique}),$$

$$(IV.14) \quad \frac{e}{m} = \frac{\beta H}{\sqrt{1 - (H^2 / \gamma_{55})}} \quad \left(\text{où } H = \gamma_{5N} \frac{dx^N}{dS} \right).$$

La géométrisation du champ électromagnétique se trouve réalisée par l'intermédiaire de la relation (IV.13); un changement du système des sections correspond à un changement de jauge électromagnétique.

H est une intégrale première des géodésiques; on peut admettre que le photon décrit dans V_5 les géodésiques de longueur nulle telles que $H = 0$.

5. *Le principe de Fermat en théorie de Jordan et Thiry* [77]. — Voyons s'il est possible de généraliser aussi, en passant à V_5 , le résultat obtenu en relativité générale pour un milieu réfringent homogène d'indice n .

a) Nous définissons donc une variété $\bar{V}_5$, définie par celle qui porte V_5 et de métrique $d\bar{S}^2 = \bar{\gamma}_{MN} dx^M dx^N$, où

$$(IV.15) \quad \bar{\gamma}_{MN} = \gamma_{MN} - \Pi v_M v_N, \quad \bar{\gamma}^{MN} = \gamma^{MN} + \frac{\Pi}{1 - \Pi v^R v_R} v^M v^N.$$

Nous désignons par Π un coefficient qui dépend de n et doit évidemment être nul pour $n = 1$.

Au lieu de définir de la façon la plus simple, v^M par

$$(IV.16) \quad v^M = dx^M / dS,$$

nous posons

$$(IV.17) \quad v^M = dx^M / d\lambda \quad (\text{donc } v^M v_M = dS^2 / d\lambda^2)$$

et nous pourrions envisager l'un des choix suivants :

- a) $d\lambda^2 = dS^2$, d'où $v^M v_M = 1$;
- b) $d\lambda^2 = -dS^2$, d'où $v^M v_M = -1$;
- c) $d\lambda^2 = ds^2$, d'où $v^M v_M = 1 + (v_5^2 / \gamma_{55})$.

(25) Les indices latins majuscules prennent les valeurs de 1 à 5.

(Le dernier a été proposé [79] en vue d'éviter certaines difficultés de la théorie.)

Nous avons $\epsilon_5 v_M = 0$ et nous supposons de plus $\epsilon_5 n = 0$, $\epsilon_5 \Pi = 0$, $\gamma_{55} < 0$. De ces conditions, il résulte que $\epsilon_5 \gamma_{MN} = 0$ et que V_5 jouit des mêmes propriétés que V_5 . Ainsi l'espace quotient V_4 a pour métrique $\bar{g}_{\mu\nu} = \bar{\gamma}_{\mu\nu} - (\bar{\gamma}_{\mu 5} \bar{\gamma}_{\nu 5} / \bar{\gamma}_{55})$, $g^{\mu\nu} = \bar{\gamma}^{\mu\nu}$. Notons les relations

$$dS^2 = ds^2 + \frac{v_5^2}{\gamma_{55}} d\lambda^2, \quad d\bar{S}^2 = dS^2 (1 - \Pi v^N v_N), \quad v_\mu = u_\mu \frac{ds}{d\lambda} + \frac{\gamma_{\mu 5}}{\gamma_{55}} v_5,$$

qui permettent d'obtenir

$$\frac{g_{\mu\nu}}{g_{\mu\mu} g_{\nu\nu}} = \frac{\Pi (ds^2/d\lambda^2)}{1 - \Pi (v_5^2/\gamma_{55})} u_\mu u_\nu.$$

Il est alors logique de poser

$$(IV.18) \quad 1 - \frac{1}{n^2} = \frac{\Pi}{1 - \Pi (v_5^2/\gamma_{55})} \frac{ds^2}{d\lambda^2},$$

soit, selon le cas,

$$a) \quad \Pi = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) / \left(1 - \frac{1}{n^2} \frac{v_5^2}{\gamma_{55}}\right), \quad b) \quad \Pi = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) / \left(-1 - \frac{1}{n^2} \frac{v_5^2}{\gamma_{55}}\right), \\ c) \quad \Pi = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) / \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \frac{v_5^2}{\gamma_{55}}\right].$$

b) Nous devons ensuite examiner les conséquences du principe des géodésiques appliqué à $\bar{V}_5$; elles doivent être compatibles avec les conclusions rappelées plus haut, qui s'appliquent à V_4 .

Les géodésiques de $\bar{V}_5$ admettent l'intégrale première

$$\bar{H} = \bar{\gamma}_{5N} v^N \frac{d\lambda}{dS} \quad \left(\bar{H}^2 = v_5^2 (1 - \Pi v^M v_M) \frac{d\lambda^2}{dS^2} \right).$$

Nous utilisons la méthode de « descente » [80] pour les projeter sur V_4 ; celles de ces courbes qui rendent $d\bar{S}^2 > 0$ se projettent selon les extrémales de

$$\int \left(\sqrt{1 - \frac{\bar{H}^2}{\gamma_{55}}} \sqrt{g_{\mu\nu}} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + \bar{H} \frac{\bar{\gamma}_{5\mu}}{\gamma_{55}} \dot{x}^\mu \right) d\tau$$

orientées $ds^2 > 0$.

Ainsi l'hypothèse que le photon décrit les géodésiques de longueur nulle de V_5 telles que $H = 0$ a pour conséquence que ses trajectoires dans V_4 sont des géodésiques de longueur nulle.

6. *La conservation de l'énergie en théorie de Jordan et Thiry.* - Pour obtenir les trajectoires décrites dans V_5 comme conséquence des équations de champ, il suffit évidemment que celles-ci résultent d'un lagrangien calqué sur celui de la relativité générale.

Le premier membre des équations de champ est donc le tenseur d'Einstein de V_5 ; au second membre se trouve un tenseur qui généralise le tenseur d'impulsion-énergie matériel :

$$(IV.19) \quad S_{PQ} = \chi M_{PQ}.$$

Il est possible de transcrire celles de ces équations pour lesquelles les deux

indices sont grecs, dans l'espace V_4 ; si l'on utilise la métrique conforme [74] de F. Hennequin ⁽²⁶⁾,

$$(IV.20) \quad \tilde{g}_{\mu\nu} = \sqrt{-\gamma_{55}} g_{\mu\nu},$$

on obtient [81]

$$(IV.21) \quad S_{\mu\nu} - \chi M_{\mu\nu} = {}^4S_{\mu\nu} - \chi (\tau_{\mu\nu} + s_{\mu\nu} + M_{\mu\nu}),$$

avec les notations suivantes :

${}^4S_{\mu\nu}$ est le tenseur d'Einstein de V_4 (dans la métrique conforme),

$\tau_{\mu\nu}$ est le tenseur de Maxwell,

$s_{\mu\nu}$ est le tenseur d'impulsion-énergie du champ mésonique scalaire [cf. (III.47)].

Cette retranscription, en effet, permet d'interpréter le quinzième potentiel γ_{55} ;

$\psi = \sqrt{3/2} \chi \text{Log } \chi - \gamma_{55}$ définit sa relation avec celui du champ mésonique ψ ⁽²⁷⁾.

Comme en relativité générale, la conservation (au sens de la divergence covariante) de ${}^4S_{\mu\nu}$ exprime alors la conservation d'une impulsion-énergie totale.

2. Représentation pentadimensionnelle des particules de spin maximum 2. —

Dans l'espace-temps de Minkowski, l'étude de la particule de spin total maximum 2 fournit, comme nous l'avons rappelé (§ III.1), trois groupes de relations indépendantes entre les grandeurs de la théorie [65]. Ils décrivent respectivement les états de spin total 2, 1 ou 0 et dépendent respectivement d'un tenseur symétrique de rang 2, d'un vecteur ou d'un scalaire.

Les deux premiers groupes s'identifient avec les équations d'Einstein à l'approximation quasi euclidienne et avec les équations de Maxwell. Les phénomènes de gravitation résultent ainsi des propriétés de cette particule lorsqu'elle possède son spin maximum, tandis que les phénomènes électromagnétiques proviennent de l'état de spin 1.

En partant d'un champ de tenseurs symétriques de rang 2 dans l'espace euclidien pentadimensionnel, nous allons réunir les trois systèmes en un seul. Ce système unique apparaîtra, sans surprendre, comme le résultat de la retranscription à l'approximation des champs faibles, de la théorie de Jordan et Thiry.

1. Les équations de Jordan et Thiry approchées. — Cette approximation s'exprime par

$$(IV.22) \quad \gamma_{MN} = \gamma_{MN} + k_{MN}.$$

L'hypothèse (IV.13) devient

$$(IV.23) \quad \partial_5 k_{MN} = 0.$$

Le lagrangien prend la forme approchée (III.2), où les indices grecs sont remplacés par des indices latins.

On sait, par ailleurs [74], que la métrique conforme (IV.20) a en particulier l'avantage suivant : la condition d'isothermie pour les coordonnées dans V_5 entraîne la condition d'isothermie dans V_4 .

La condition d'isothermie approchée dans V_5 s'écrit

⁽²⁶⁾ Il se pose, dans ce cas, un problème au sujet de la correspondance entre géodésiques de V_5 et géodésiques de V_4 (cf. [87]).

⁽²⁷⁾ La quinzième équation de champ, cependant, n'est pas l'équation de Klein-Gordon pour ψ .

$$(IV.24) \quad \partial^M(k_{MN} - \frac{1}{2}\eta_{MN}k) = 0 \quad (k = \eta^{MN}k_{MN})$$

et, dans V_4 ,

$$(IV.25) \quad \partial^\mu(h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h) = 0 \quad (h = \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}),$$

si $h_{\mu\nu}$ est défini par $\tilde{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, soit par

$$(IV.26) \quad h_{\mu\nu} = k_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}k_{55}.$$

Les équations approchées du cas extérieur deviennent donc [cf. (III.3)]

$$(IV.27) \quad c_N^N k_{MP} = 0,$$

d'où également les équations approchées d'Einstein et de Maxwell :

$$(IV.28) \quad \partial^\mu_\mu h_{\nu\rho} = 0,$$

$$(IV.29) \quad \partial^\mu_\mu k_{5\rho} = 0.$$

[En effet, d'après (IV.13), $\varphi_\rho \sim -k_{5\rho}$ et (IV.24) a pour conséquence la condition de Lorentz $\partial^\mu k_{5\mu} = 0$.]

2. Les équations de la particule de spin total maximum 2. — a) Etant donné le champ de tenseurs symétriques ψ_{MN} dans l'espace euclidien à cinq dimensions V_5^0 , répondant à la condition

$$(IV.30) \quad \partial_5 \psi_{MN} = 0,$$

nous posons donc [cf. (III.14)]

$$(S^5) \quad \begin{cases} (IV.31) & \partial_M \psi_{NP} - \partial_N \psi_{MP} = -\psi_{[MN]P}, \\ (IV.32) & \partial^P \psi_{[PM]N} = \mu^2 \psi_{MN}, \\ (IV.33) & \partial_P \psi_{[QM]N} - \partial_N \psi_{[QM]P} = \psi_{([PN][QM])}. \end{cases}$$

Ces équations entraînent

$$(IV.34) \quad \partial^M \psi_{MN} = 0,$$

$$(IV.35) \quad \partial^M_M \psi_{PQ} + \mu^2 \psi_{PQ} = 0.$$

b) En posant

$$\psi_{MN}^{(2)} = \psi_{MN} - \frac{1}{4} \left(\eta_{MN} \psi + \frac{1}{\mu^2} \partial_{MN} \psi \right),$$

nous définissons un tenseur de trace nulle ($\eta_{MN} \psi_{MN}^{(2)} = 0$), qui nous permet aisément de scinder le système ci-dessus en deux nouveaux systèmes :

$$(S_2) \quad \begin{cases} \partial_M \psi_{PQ}^{(2)} - \partial_P \psi_{MQ}^{(2)} = -\psi_{[MP]Q}^{(2)}, & \partial^P \psi_{[PM]N}^{(2)} = \mu^2 \psi_{MN}^{(2)}, \\ \partial_P \psi_{[QM]N}^{(2)} - \partial_N \psi_{[QM]P}^{(2)} = \psi_{([PN][QM])}^{(2)}; \end{cases}$$

$$(S_0) \quad \partial_M \psi = -\psi_M^{(0)}, \quad \partial^M \psi_M^{(0)} = \mu^2 \psi, \quad \partial_M \psi_P^{(0)} = \partial_P \psi_M^{(0)} = \psi_{MP}^{(0)}.$$

Ce sont deux systèmes irréductibles, formellement identiques aux systèmes qui décrivent les états de spins 2 et 0 dans V_4^0 ; l'un ne dépend que du tenseur symétrique de trace nulle $\psi_{MN}^{(2)}$, l'autre que du scalaire ψ .

Nous dirons que les systèmes (S_2^5) et (S_0^5) décrivent les états de spins 2 et 0 dans V_5^0 [75].

(D'autres considérations ont mené G. Petiau [84] au système (S^5) ; mais il fait l'hypothèse restrictive $\psi = 0$, comme Fierz & Pauli [48] dans V_4^0 . Nous venons de voir que cette hypothèse n'est pas indispensable.)

c) Des deux systèmes (S_2^5) et (S_0^5) vont effectivement découler les systèmes correspondants de la représentation quadridimensionnelle. Posons

$$\Phi_{\mu\nu}^{(2)} = \psi_{\mu\nu}^{(2)} - \frac{1}{3} \left(\eta_{\mu\nu} \psi_{55}^{(2)} + \frac{1}{\mu^2} \partial_{\mu\nu} \psi_{55}^{(2)} \right)$$

(d'où $\eta^{\mu\nu} \Phi_{\mu\nu}^{(2)} = 0$), puis $\Phi = (1 + 3\xi) \psi + (1 + 3\eta) \psi_{55}$.

Les coefficients ξ et η interviennent dans la définition d'un tenseur $\Phi_{\mu\nu}$ de V_4^0 , dont Φ est la trace et tel que

$$\Phi_{\mu\nu}^{(2)} = \Phi_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \left(\eta_{\mu\nu} \Phi + \frac{1}{\mu^2} \partial_{\mu\nu} \Phi \right).$$

Les deux systèmes considérés en fournissent alors deux autres, qui s'écrivent de façon strictement semblable, en remplaçant ψ par Φ et les indices latins par des indices grecs ; ce sont donc les équations des états de spins 2 et 0 dans V_4^0 .

Il résulte également de (S^5), compte tenu de (IV.30),

$$(S_1^4) \quad \partial_\mu \psi_{\nu 5} - \partial_\nu \psi_{\mu 5} = -\psi_{[\mu\nu]5}, \quad \partial^\rho \psi_{[\rho\nu]5} = \mu^2 \psi_{\nu 5}, \quad \partial_\mu \psi_{[\rho\nu]5} = \psi_{([\mu 5][\rho\nu])}.$$

C'est le groupe d'équations de la particule de spin 1. (Notons que l'on a aussi $\psi_{\mu 5} = \psi_{\mu 5}^{(2)}$.)

Ce système [ou bien l'ensemble (IV.34), (IV.35)] entraîne

$$(IV.36) \quad \partial^\mu \psi_{\mu 5} = 0, \quad \partial^\rho \psi_{\rho\mu 5} + \mu^2 \psi_{\mu 5} = 0.$$

d) N'ayant pas fait l'hypothèse $\psi = 0$, nous ne pouvons pas identifier ψ_{MN} à l'écart k_{MN} entre métrique riemannienne et métrique euclidienne défini par (IV.22). Nous pouvons cependant poser

$$(IV.37) \quad k_{MN} = \psi_{MN} + \frac{a}{\mu^2} \partial_{MN} \psi - \frac{1+a}{3} \eta_{MN} \psi,$$

expression qui vérifie la condition d'isothermie.

En la portant dans les relations (IV.34) et (IV.35), nous obtenons simplement la condition (IV.24) et l'équation (IV.27) complétée par un terme de masse. $\psi_{([MN][PQ])}$ est lié à la partie principale du tenseur de courbure de V_5 . De plus, (IV.37) entraîne $k_{\mu 5} = \psi_{\mu 5}$ et l'on reconnaît dans (IV.36) les équations (IV.29).

De même, la relation

$$(IV.38) \quad \bar{h}_{\mu\nu} = \Phi_{\mu\nu} + \frac{\alpha}{\mu^2} \partial_{\mu\nu} \Phi - \frac{1+\alpha}{2} \eta_{\mu\nu} \Phi$$

permet d'obtenir (IV.25) et (IV.28).

Ainsi, le seul système (S^5) suffit à décrire les trois états de spin ; moyennant la relation (IV.37), il est finalement équivalent aux équations approchées de la théorie de Jordan et Thiry (abstraction faite du terme de masse, que même un terme cosmologique ne peut faire apparaître).

3. Le champ $\psi_{[MN]P}$ et la définition d'une induction. — Les équations (IV.32) peuvent être déduites du lagrangien

$$L = \frac{1}{4} \eta^{AM} \eta^{BN} \eta^{PQ} \psi_{[AB]P} \psi_{[MN]Q} - \frac{\mu^2}{2} \eta^{AM} \eta^{BN} \psi_{AB} \psi_{MN}$$

[à condition toutefois de ne pas symétriser ; ψ_{MN} étant symétrique, lorsque nous écrivons (I.14) nous entendons en fait $A^{MN} = \frac{1}{2} \left(\frac{\delta L}{\delta \psi_{MN}} + \frac{\delta L}{\delta \psi_{NM}} \right)$].

Nous venons de voir que les équations (IV.32) sont identiques aux équations de Thiry pour des champs faibles. Nous pouvons obtenir les équations du champ unitaire en présence des sources, en ajoutant à L un terme tel que $-M^{PQ}\psi_{PQ}$. Mais dans ce cas il peut sembler préférable, tout comme en électromagnétisme, que les champs deviennent des inductions.

Etant donné les résultats tout à fait parallèles déjà obtenus en ce qui concerne le champ électromagnétique [cf. (IV.2), (IV.15), ...], nous poursuivons l'analogie en écrivant

$$\bar{L} = \frac{1}{4\epsilon'\mu'^2} \bar{\eta}^{AM} \bar{\eta}^{BN} \bar{\eta}^{PQ} \psi_{[AB]P} \psi_{[MN]Q}$$

et en posant

$$\bar{\eta}_{PQ} = \eta_{PQ} - \left(1 - \frac{1}{\epsilon'\mu'}\right) v_P v_Q, \quad \bar{\eta}^{PQ} = \eta^{PQ} + (\epsilon'\mu' - 1) v^P v^Q.$$

Ainsi s'introduit l'induction $F^{[AB]P} = \partial \bar{L} / \partial \psi_{[AB]P}$ ou

$$F^{[AB]P} = \frac{1}{\epsilon'\mu'^2} \bar{\eta}^{AM} \bar{\eta}^{BN} \bar{\eta}^{PQ} \psi_{[MN]Q}.$$

Elle vérifie des relations champ-induction qui rappellent (IV.9) :

$$F^{[AB]P} v_B v_P = \epsilon' \psi^{[AN]Q} v_N v_Q, \quad v_P \sum_{(ABR)} F^{[AB]P} v^R = \frac{1}{\mu'} v_P \sum_{(ABR)} \psi^{[AB]P} v^R.$$

Les équations de champ ont alors pour premier membre $\partial_P F^{[PM]N}$.

On peut concevoir qu'un champ électrostatique ait pour effet, sur la propagation des gravitons, de doter l'espace d'un indice apparent. On sait en effet par exemple, qu'inversement, dans le cas d'un champ statique à symétrie sphérique en relativité générale, on peut interpréter de cette façon l'effet du champ gravifique sur la propagation des photons [86] (cf. aussi L. Bel [71] qui définit une induction gravitationnelle, et [89]).

Ici, cependant, il n'est pas aisé de séparer de façon nette l'intervention de chaque champ : ce sont les deux effets qui contribuent à la création de l'indice $\sqrt{\epsilon'\mu'}$.

Remarquons enfin (comme nous l'avons fait au chapitre III au sujet des théories euclidiennes de la gravitation) que, la divergence du premier membre des équations (IV.32) étant identiquement nulle, ces équations ne pourront jamais être considérées que comme celles d'une théorie approchée, à moins de perdre leur linéarité par un second membre approprié.

V. Formalisme pentadimensionnel (suite)

Ce sont les équations de la théorie euclidienne de la gravitation dans V_4^0 , que nous allons ici transcrire dans V_5^0 , afin de traiter à la fois le champ de gravitation et le champ électromagnétique. Nous avons dit pour quelles raisons les équations (IV.32) ne peuvent être entièrement satisfaisantes, dans le cadre d'une théorie phénoménologique.

Les identités du chapitre I, le formalisme du chapitre II ou III ne sont pas tributaires du nombre de dimensions de l'espace où on les utilise ; nous les mettrons encore en jeu. Leur interprétation, par contre, sera moins immédiate.

La recherche de la solution statique à symétrie sphérique et ses applications nous permettront d'exposer des calculs que nous n'avons pas rappelés en ce qui concerne la théorie quadridimensionnelle (cf. [55]). Ces calculs correspondront ici au schéma plus complexe champ de gravitation + champ électromagnétique.

L'analogie avec les résultats de la théorie de Jordan et Thiry sera constante, bien que nos équations n'en soient pas une approximation. Nous pourrions également rapprocher les prévisions expérimentales de celles que l'on obtient en théorie d'Einstein et Maxwell, puisqu'elles correspondront à l'hypothèse d'un corps central non neutre.

1. Equations de champ et équations du mouvement. — Dans V_5^0 où, pour le moment, la métrique $ds^2 = g_{MN} dx^M dx^N$ est quelconque, se trouve défini un champ de tenseurs symétriques ψ_{MN} tel que

$$(V.1) \quad \partial_5 \psi_{MN} = 0.$$

Sa trace est désignée par ψ : $\psi = g^{MN} \psi_{MN}$.

1. Le lagrangien et les équations de champ. — Le lagrangien le plus général que nous puissions écrire, compte tenu de la condition (I.1), prend la forme [cf. (III.23)]

$$(V.2) \quad \mathcal{L} = L \sqrt{-g} = \left(\frac{1}{2} \nabla^M \psi_{PQ} \nabla_M \psi^{PQ} + \tau \nabla^M \psi^{PQ} \nabla_P \psi_{MQ} + \right. \\ \left. + \sigma \nabla^M \psi_{MP} \nabla_Q \psi^{QP} + \gamma \nabla^N \psi_{NP} \nabla^P \psi + \frac{1}{2} \nu \nabla^N \psi \nabla_N \psi \right) \sqrt{-g}.$$

Les vérifications expérimentales détermineront éventuellement les coefficients τ, σ, γ et ν , quelconques pour l'instant.

Le premier membre des équations de champ, par application à $\mathcal{L}$ d'un principe variationnel, s'écrit, d'après (III.41'),

$$(V.3) \quad A^{MN} \equiv -\nabla_R A^{R,MN},$$

où $A^{R,MN} = \partial \mathcal{L} / \partial (\nabla_R \psi_{MN}) (= A^{R,NM})$. Par conséquent,

$$(V.4) \quad A^{P,MN} = \nabla^P \psi^{MN} + \tau (\nabla^M \psi^{PN} + \nabla^N \psi^{PM}) + \sigma (g^{PM} \nabla^R \psi_{RN} + \\ + g^{PN} \nabla^R \psi_{RM}) + \gamma g^{MN} \nabla^R \psi_{RP} + \frac{1}{2} \gamma (g^{PM} \nabla^N \psi + g^{PN} \nabla^M \psi) + \nu g^{MN} \nabla^P \psi,$$

$$(V.5) \quad -A^{MN} = \nabla^P \psi_{P}^{MN} + \alpha (\nabla_P \psi^{PN} + \nabla^P \psi_{P}^{PM}) + \\ + \gamma (g^{MN} \nabla_R \psi^{RP} + \nabla^{MN} \psi) + \nu g^{MN} \nabla^P \psi \quad (\alpha = \tau + \sigma).$$

En l'absence de sources, nous écrirons les équations de champ

$$(V.6) \quad A^{MN} = 0$$

et, pour généraliser le cas intérieur,

$$(V.7) \quad A^{PQ} = \chi M^{PQ},$$

$$(V.8) \quad M^{PQ} = W c^2 v^P v^Q.$$

On verra que l'on peut donner à la constante χ la valeur usuelle $8\pi G/c^4$ et que l'on peut lier W aux densités de charge et de masse de la distribution matérielle.

Le vecteur vitesse pentadimensionnel v^P est défini par $v^P = dx^P/dS$, d'où $v^P v_P = 1$.

2. *Les équations de champ et l'invariance de jauge.* — S'il s'avère possible, par un choix convenable des coefficients α, γ, ν qui interviennent dans A^{MN} , de rendre cette expression invariante dans certaines « transformations de jauge », nous pourrions demander aux potentiels de vérifier une condition supplémentaire, du type condition d'isothermie approchée. Cela serait surtout intéressant du fait que nous désirons aussi obtenir, à partir de (V.7), les équations de l'électromagnétisme. Considérons d'abord la transformation

$$(V.9) \quad \psi_{MN} \rightarrow \psi'_{MN} = \psi_{MN} + \nabla_M V_N + \nabla_N V_M,$$

du type transformation de jauge gravitationnelle, V_M étant un vecteur. Elle laisse A^{PQ} invariant, à condition que

$$(V.10) \quad 1 + \alpha = 0, \quad \gamma + \alpha = 0, \quad \gamma + \nu = 0$$

(ou $\alpha = \nu = -1, \gamma = 1$). Or, cet ensemble de valeurs est précisément celui pour lequel $\nabla_P A^{PQ} = 0$, identité que nous avons décidé d'éviter, puisqu'elle ferait des équations (V.7) un simple résultat d'approximations.

Nous pouvons cependant envisager de remplacer (V.9) par

$$(V.11) \quad \psi_{MN} \rightarrow \psi'_{MN} = \psi_{MN} + \nabla_M V_N + \nabla_N V_M - a g_{MN} \nabla_P V^P.$$

L'invariance de A^{PQ} s'obtient alors pour

$$1 - \alpha = 0, \quad 2(\gamma + \alpha) - a(2\alpha + 5\gamma) = 0, \quad 2(\gamma + \nu) - a(1 - \gamma - 5\nu) = 0,$$

ce qui suppose :

le choix de $\alpha, \alpha = -1$;

une relation entre γ et ν , $4\gamma^2 - 2\gamma + 1 = 3\nu$;

et détermine a . Si l'on se place dans ce cas, il ne reste plus dans A^{PQ} qu'un seul coefficient indéterminé.

Nous pouvons également considérer la transformation

$$(V.12) \quad \psi_{MN} \rightarrow \psi'_{MN} = \psi_{MN} + \nabla_{MN} V$$

qui rappelle la transformation de jauge électromagnétique : elle entraîne les conditions $1 + 2\alpha + \gamma = 0, \nu + \gamma = 0$, qui laissent un coefficient indéterminé, mais excluent le choix $\alpha = -1$; pour cette valeur, elles seraient identiques aux conditions rejetées (V.10). Or nous verrons plus loin que d'autres considérations nous imposent précisément la valeur $\alpha = -1$. De toute façon, la condition supplémentaire, que cette invariance permettrait d'imposer, se réduirait à une seule équation et non pas cinq, comme les précédentes.

Nous verrons dans la suite dans quelle mesure les données expérimentales imposent aux coefficients des valeurs déterminées. Il est bien entendu que les valeurs (V.10) [donc la transformation (V.9)] sont éliminées : elles sont incompatibles avec des équations du mouvement cohérentes.

3. *Les équations du mouvement.* — Dans le cas intérieur, en plus de (V.7) et (V.8), nous posons

$$(V.13) \quad \nabla_N ({}^{(m)}t_P{}^N + M_P{}^N) = 0,$$

où ${}^{(m)}t_P{}^N$ est le « tenseur métrique » déduit du lagrangien (V.2) :

$$\sqrt{-g} {}^{(m)}t^{MN} = -\lambda \delta \mathcal{L} / \delta g_{MN}.$$

Nous savons [cf. (III.46)] qu'il s'écrit

$$(V.14) \quad t^{(m)PQ} = \frac{1}{2} \lambda \{ A^{Q,MN} \nabla^P \psi_{MN} - g^{PQ} L + 2 A^{QR} \psi^P_R - \nabla_R [(A^{R,PM} + A^{P,RM}) \psi^Q_M] + \nabla_R [(A^{R,QM} - A^{Q,RM}) \psi^P_M + (A^{P,QM} + A^{Q,PM}) \psi^R_M] \}.$$

Il rappelle donc à la fois, par sa forme, le tenseur d'impulsion-énergie gravitationnelle (proposé au chapitre III) et le tenseur de Maxwell. Nous verrons qu'il les contient effectivement tous deux.

Nous savons encore que (V.13) s'écrit aussi

$$(V.15) \quad \nabla_M (\overset{*}{W} \overset{*}{c}^2 \overset{*}{v}^P \overset{*}{v}^M) = 0,$$

compte tenu des définitions suivantes : $\overset{*}{W} \sqrt{|\overset{*}{g}|} = W \omega^2 \sqrt{|g|}$,

$$(V.16) \quad \omega^2 = \overset{*}{g}_{MN} \overset{*}{v}^M \overset{*}{v}^N = (g_{MN} + \lambda \chi \psi_{MN}) \overset{*}{v}^M \overset{*}{v}^N,$$

$$(V.17) \quad \overset{*}{v}^M = \overset{*}{v}^M / \omega.$$

Ainsi en résulte-t-il

$$(V.18) \quad \nabla_M (\overset{*}{W} \overset{*}{v}^M) = 0,$$

$$(V.19) \quad \overset{*}{v}^M \nabla_M \overset{*}{v}^N = 0.$$

L'équation (V.18) est une équation de continuité et des équations (V.19) se déduiront les équations du mouvement dans l'espace. Nous dirons donc que (V.13) est la loi de conservation de l'énergie dans V_5^0 et (V.19) la loi du mouvement pentadimensionnel. Elles sont formellement identiques à celles de la théorie de Jordan et Thiry.

2. Champ électromagnétique et champ de gravitation. — Les équations (V.7) en représentent trois groupes, suivant les valeurs données aux indices (5, 4 ou j). Nous pourrions y distinguer les équations de la gravitation et celles de l'électromagnétisme, moyennant certaine interprétation des potentiels ψ_{MN} et du second membre (V.8).

Nous nous plaçons dans ce qui suit en coordonnées cartésiennes.

1. Les équations de la gravitation. — Ecrivons les équations (V.7) pour les valeurs des indices que représentent les lettres grecques : $A_{\mu\nu} = \chi W \overset{*}{c}^2 v_\mu v_\nu$. Nous avons

$$(V.20) \quad A_{\mu\nu} = {}^4A_{\mu\nu} + \gamma \partial_{\mu\nu} \psi_{55} + \gamma \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \alpha \psi_{55}$$

si nous désignons par ${}^4A_{\mu\nu}$ l'expression identique à A_{MN} , mais écrite uniquement à l'aide des composantes $\psi_{\rho\sigma}$ et de la trace ${}^4\psi \equiv \eta^{\mu\nu} \psi_{\mu\nu}$ de ψ_{MN} dans V_4^0 .

En introduisant une relation telle que $\Phi_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} + b \eta_{\mu\nu} \psi_{55}$ et en choisissant b convenablement, il serait possible d'obtenir $A_{\mu\nu} = {}^4A_{\mu\nu}(\Phi_{\alpha\beta}) + \rho \eta_{\mu\nu}$; on pourrait alors écrire les mêmes équations qu'en théorie quadridimensionnelle [cf. (III.24)] avec un schéma du type fluide parfait. On constate toutefois qu'une telle définition des potentiels de gravitation créerait plus loin des difficultés. Nous identifions donc ces potentiels aux $\psi_{\mu\nu}$, identification la plus simple et justifiée par ses conséquences.

Comme

$$(V.21) \quad (ds/dS)^2 = 1 + (v_5)^2,$$

nous avons

$$(V.22) \quad v^\mu = u^\mu \sqrt{1 + (v_5)^2}.$$

Ainsi, $A_{\mu\nu} = \chi W c^2 [1 + (v_5)^2] u_\mu u_\nu$.

Si donc nous posons

$$(V.23) \quad W [1 + (v_5)^2]/2 = m,$$

les équations ci-dessus deviennent

$$(V.24) \quad \frac{1}{2} A_{\mu\nu} = \chi m c^2 u_\mu u_\nu.$$

Dans $A_{\mu\nu}$, selon (V.20), le potentiel ψ_{55} intervient à côté des potentiels de gravitation $\psi_{\alpha\beta}$. Nous pouvons prendre $\chi = 8 \pi G/c^4$.

2. *Les équations de l'électromagnétisme.* — Compte tenu de (V.1), nous avons

$$A^{\mu 5} = -(\partial^\rho \psi^{\mu 5} + \alpha \partial^\mu_\rho \psi^{\rho 5}).$$

Posons $\alpha = -1$ et

$$(V.25) \quad \varphi^\mu = (1/\beta) \psi^{\mu 5};$$

alors

$$(V.26) \quad A^{\mu 5} = \beta \partial_\rho \varphi^{\mu\rho} \quad (\varphi_{\mu\rho} = \partial_\mu \varphi_\rho - \partial_\rho \varphi_\mu)$$

et l'on peut imposer à $\psi^{\mu 5}$ la condition de Lorentz :

$$(V.27) \quad \partial_\mu \psi^{\mu 5} = 0.$$

[Le potentiel $\psi_{\mu 5}$ n'intervient dans aucune des autres équations (V.7).]

L'invariance de A^{MN} , dans une transformation telle que (V.11), comprendrait l'invariance de jauge électromagnétique.

Nous avons, de plus, $A^{\mu, \nu 5} = \partial^\mu \psi^{\nu 5} + \tau \partial^\nu \psi^{\mu 5} + \sigma \eta^{\mu\nu} \partial^\sigma \psi_\sigma^5$, c'est-à-dire

$$(V.28) \quad A^{\mu, \nu 5} = \beta \varphi^{\mu\nu}$$

seulement lorsque $\tau = -1$.

Nous ferons donc dorénavant ⁽²⁸⁾

$$(V.29) \quad \tau = \alpha = -1, \quad \sigma = 0.$$

Posons

$$(V.30) \quad (\chi W c^2/4 \pi \beta) v^5 \sqrt{1 + (v_5)^2} = \varepsilon,$$

de façon que l'équation $A^{\mu 5} = \chi W c^2 v^\mu v^5$ devienne

$$(V.31) \quad A^{\mu 5} = 4 \pi \beta \varepsilon u^\mu.$$

Nous avons abouti à la retranscription $\partial_\varepsilon \varphi^{\mu\varepsilon} = 4 \pi \varepsilon u^\mu$. Nous obtenons donc les équations de Maxwell, grâce aux identifications de (V.25) et (V.30) et au choix (V.29).

Remarquons que, d'après (V.23) et (V.30), la masse et la charge varient le long de la trajectoire. (Il en est ainsi en théorie de Jordan et Thiry.)

3. *La quinzième équation.* — Nous avons enfin

$$(V.32) \quad A^{\dot{5}\dot{5}} = -(\partial^\rho \psi^{\dot{5}\dot{5}} - \gamma \partial_{\mu\nu} \psi^{\mu\nu} - \nu \partial^\rho \psi)$$

et

$$(V.33) \quad A^{\dot{5}\dot{5}} = \chi W c^2 (v_5)^2 = \frac{8 \pi^2 \beta^2 \varepsilon^2}{\chi c^2 m}.$$

⁽²⁸⁾ Nous savons que les deux termes de L où τ et σ sont respectivement en facteur, ont la même contribution à A^{MN} , puisqu'ils diffèrent par une divergence, donc la même aussi à $\nabla_N t^{(m)MN}$; mais leur participation à $A^{M,NP}$, donc aussi à $t^{(m)MN}$, est différente (cf. [2]). Il n'est donc pas a priori indifférent de faire $\sigma = 0$.

On peut éventuellement éliminer de A^{55} le terme $\partial_{\rho\mu}\psi^{\rho\mu}$, à l'aide de l'équation $A^M_M = \gamma W c^2$, ce qui ne laisse subsister dans (V.32) que des termes en dalembertien.

On voit apparaître au dernier membre de (V.33) le rapport ε^2/m .

4. *L'impulsion-énergie du champ.* — Nous avons associé les équations du mouvement (V.19) à la loi de conservation (V.13) dans V_5^0 . Calculons les composantes $t^{(m)\mu\nu}$ de $t^{(m)PQ}$ à partir de (V.14); compte tenu de (V.4), (V.26) et (V.28), nous obtenons

$$(V.34) \quad t^{(m)\mu\nu} = [\dots] + \lambda \beta^2 \tau^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \lambda (A^{\nu,55} \partial^\mu \psi_{55} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} A^{\alpha,55} \partial_\alpha \psi_{55}).$$

Entre crochets se trouve un tenseur dont l'expression s'obtient en écrivant le second membre de (V.14), avec tous les indices grecs; $\tau^{\mu\nu}$ est le tenseur de Maxwell.

Nous utilisons l'expression (V.4) de $A^{\mu,55}$ et nous éliminons ψ^{55} de $A^{\mu,\nu\rho}$; nous obtenons alors

$$(V.35) \quad t^{(m)\mu\nu} = {}^4t^{\mu\nu} + \lambda \beta^2 \tau^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \lambda (1 + \nu) (\partial^\mu \psi^{55} \partial^\nu \psi^{55} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial^\alpha \psi^{55} \partial_\alpha \psi^{55}) + \frac{1}{2} \lambda \partial_\rho n^{\rho\nu,\mu} - \frac{1}{2} \lambda (\partial^\mu \Phi^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} \partial^\rho \Phi^\nu_\rho - \eta^{\mu\nu} \partial_\alpha \Phi^{\alpha\sigma}) \partial_\sigma \psi_{55} + \lambda (\gamma \partial^\nu \psi_{55} + \nu \eta^{\nu\sigma} \partial^\rho \psi_{55}) \psi^\mu_\sigma.$$

Ici, ${}^4t^{\mu\nu}$ s'écrit comme $t^{(m)MN}$ tous les indices étant grecs et ${}^4\psi$ remplaçant ψ ; ce tenseur ne contient que les composantes $\psi_{\rho\sigma}$; $n^{\rho\nu,\mu}$ est une expression antisymétrique en ρ, ν :

$$n^{\rho\nu,\mu} = [\gamma \eta^{\rho\mu} \psi^{\nu\sigma} - (\frac{1}{2} \gamma - \nu) \eta^{\nu\rho} \psi^{\sigma\mu}] \partial_\sigma \psi_{55} + (\nu + \frac{1}{2} \gamma) (\eta^{\rho\sigma} \partial^\mu \psi_{55} + \eta^{\mu\sigma} \partial^\rho \psi_{55}) \psi^\nu_\sigma - (\text{sym. } \rho, \nu)$$

$$\text{et } \Phi^{\nu\sigma} = \gamma \psi^{\nu\sigma} + \nu \eta^{\nu\sigma} {}^4\psi.$$

Les trois derniers termes de (V.35) étant des termes d'interaction, nous pouvons reconnaître dans les trois premiers les tenseurs d'impulsion-énergie: du champ de gravitation, du champ électromagnétique et d'un champ scalaire dont ψ_{55} serait le potentiel [cf. (III.47)].

Remarquons que le potentiel électromagnétique $\psi_{\mu 5}$ n'apparaît strictement que dans le tenseur de Maxwell.

La condition de conservation (V.13) est équivalente à la même condition, écrite avec des indices grecs, et à une intégrale première des trajectoires (cf. § V.4).

3. **Approximation des champs faibles. Champs statiques.** — 1. *L'approximation newtonienne.* — Supposons les champs faibles et les mouvements lents.

La première hypothèse s'exprime, pour les potentiels, par les développements suivants:

$$(V.36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi_{5M} = \frac{1}{c^2} \psi_{(2)5M} + O\left(\frac{1}{c^4}\right), \quad \psi_{44} = \frac{1}{c^2} \psi_{(2)44} + O\left(\frac{1}{c^4}\right), \\ \psi_{4i} = \frac{1}{c^3} \psi_{(3)4i} + O\left(\frac{1}{c^5}\right), \quad \psi_{ij} = \frac{1}{c^2} \psi_{(2)ij} + O\left(\frac{1}{c^4}\right), \end{array} \right.$$

donc aussi

$$(V.37) \quad \psi = \frac{1}{c^2} \psi_{(2)} + O\left(\frac{1}{c^4}\right).$$

Nous avons

$$(V.38) \quad v^i = \frac{V^i}{c} v^4 \quad \left(V^i = \frac{dx^i}{dt} = c \frac{dx^i}{dx^4} \right)$$

et, si les mouvements sont lents ($V^i \ll c$),

$$(V.39) \quad u^4 \simeq 1, \quad (v^4)^2 \simeq 1 + (v_5)^2.$$

Les équations (V.19) du mouvement s'écrivent

$$(V.40) \quad \frac{{}^*M}{v} \partial_M (g_{NR}^* \frac{{}^*R}{v}) = \frac{1}{2} \frac{{}^*M}{v} \frac{{}^*P}{v} \partial_{NG}^* \frac{{}^*P}{v},$$

avec les notations (V.16).

Le produit $\lambda \chi$ étant supposé fini, nous avons $\omega^2 = 1 + O(1/c^2)$.

Pour $N = 5$, (V.40) entraîne $dv^5/dt = O(1/c^2)$, d'où $dv^4/dt = O(1/c^2)$.

Pour $N = i$, nous obtenons alors, en négligeant les termes d'ordre plus élevé en $1/c^2$,

$$(V.41) \quad (v^4)^2 \frac{dV^i}{dt} = -\frac{\lambda \chi}{2} (v^4)^2 \partial_i \psi_{44}^{(2)} - \frac{\lambda \chi}{2} (v^5)^2 \partial_i \psi_{55}^{(2)} - \lambda \chi v^4 v^5 \partial_i \psi_{54}^{(2)}.$$

Compte tenu de (V.23), (V.30) et (V.25), ceci devient

$$(V.42) \quad m \frac{dV^i}{dt} = -m \partial_i \left(\frac{\lambda \chi}{2} \psi_{44}^{(2)} \right) - \frac{\pi}{\lambda c^4} \frac{\varepsilon^2}{m} \partial_i \psi_{55}^{(2)} + \varepsilon \partial_i \varphi_4,$$

si nous posons

$$(V.43) \quad \beta^2 = 1/2 \pi \lambda.$$

Dans le cas où la particule d'épreuve est neutre, il ne reste au second membre de (V.42) que le premier terme. Si le champ dans lequel se meut la particule est purement gravitationnel (créé, par exemple, par un corps neutre), on posera, $\frac{1}{2} \lambda \chi \psi_{(2)}^{44} = U$, U étant le potentiel newtonien.

Si, par contre, l'on considère que la partie électromagnétique du champ agit sur la particule neutre, on ne pourra plus faire cette identification. (Cf., en mécanique classique, le raisonnement qui conduit à la définition de la « masse électromagnétique » [75, 73].)

Si la particule d'épreuve possède une charge ε , le dernier terme de (V.42) est le terme coulombien classique : il s'y ajoute un terme dû au potentiel ψ_{55} [cf., en théorie de Jordan et Thiry, un terme analogue ([74] p. 75)].

Comme $\lambda \chi$ est supposé fini, β est en $1/c^2$, ce qui est convenable d'après (V.25) et (V.36).

2. *Les équations de champ dans le cas statique.* — Dans le cas d'un champ statique, les équations de champ (V.33), (V.34) et (V.24) donnent, en distinguant toutes les valeurs possibles des indices,

$$(V.44) \quad \partial^i \psi_{55} - \gamma \partial^{ij} \psi_{ij} - \nu \partial^i \psi = -\chi W c^2 (v^5)^2,$$

$$(V.45) \quad \partial^i \psi^{45} = -\chi W c^2 v^5 v^4,$$

$$(V.46) \quad \partial^i \psi^{\gamma 5} = 0,$$

$$(V.47) \quad \partial^i \psi_{44} + \gamma \partial^{ij} \psi_{ij} + \nu \partial^i \psi = -\chi W c^2 (v^4)^2,$$

$$(V.48) \quad \partial^k \psi^{4i} - \partial^i \psi^{k4} = 0,$$

$$(V.49) \quad \partial^i \psi_{\psi k l} - (\partial_{kl} \psi^i{}_l + \partial_{li} \psi^i{}_k) + \gamma (\partial_{kl} \psi - \delta_{kl} \partial^{ij} \psi_{ij}) - \nu \delta_{kl} \partial^i \psi = 0.$$

De plus, la condition de Lorentz s'écrit

$$(V.50) \quad \partial^i \psi_{i5} = 0.$$

L'équation (V.48) a la même forme que l'équation de Maxwell ; nous pouvons demander à ψ^{4i} de vérifier la condition

$$(V.51) \quad \partial^i \psi_{i4} = 0.$$

Par conséquent, dans le cas statique, les équations (V.46) et (V.48) admettent la solution

$$(V.52) \quad \psi^{i4} = \psi^{i5} = 0.$$

Par contraction de P et Q, les équations (V.7) entraînent encore

$$(V.53) \quad (1 + \gamma + 5\nu) \partial^i \psi_{i5} + (5\gamma - 2) \partial^{ij} \psi_{ij} = -\chi W c^2.$$

En calculant $\partial^{kl} A_{kl}$ à partir de (V.49), nous obtenons

$$(V.54) \quad \Delta[(\gamma - 1) \partial^{ij} \psi_{ij} - (\gamma + \nu) \Delta\psi] = 0 \quad (\Delta \equiv -\partial^i_i)$$

qui admet la solution

$$(V.55) \quad (\gamma - 1) \partial^{ij} \psi_{ij} - (\gamma + \nu) \Delta\psi = 0.$$

Les équations (V.53), (V.44) et (V.47) deviennent alors

$$(V.56) \quad \Delta\psi = -2\pi \frac{GW}{c^2} k,$$

$$(V.57) \quad \Delta\left(\psi_{55} + \frac{\gamma^2 + \nu}{\gamma - 1} \psi\right) = \frac{c^2}{2G\lambda m} \varepsilon^2,$$

$$(V.58) \quad \Delta\left(\psi_{44} + \frac{\gamma^2 + \nu}{1 - \gamma} \psi\right) = 16 \frac{\pi G}{c^2} m,$$

avec

$$(V.59) \quad k = 4(1 - \gamma) / [(1 - \gamma)^2 + 3(\gamma^2 + \nu)].$$

Les équations (V.45) et (V.49) s'écrivent, de leur côté,

$$(V.60) \quad \Delta\psi_{45} = -4\pi\beta\varepsilon,$$

$$(V.61) \quad \Delta\psi_{k1} + \partial_k^i \psi_{i1} + \partial_1^i \psi_{ki} - \gamma \partial_{k1} \psi + \frac{\gamma^2 + \nu}{\gamma - 1} \delta_{k1} \Delta\psi = 0.$$

3. *La solution statique à symétrie sphérique.* — a) Nous nous proposons de trouver l'expression des potentiels créés dans le cas statique par une masse M , de charge E , possédant la symétrie sphérique et située à l'origine des coordonnées.

Dans le cas statique, les potentiels sont les solutions des équations (V.52), (V.57), (V.60) et (V.61). On reconnaît dans (V.58) et (V.60) les équations de Poisson et d'Alembert. Nous avons donc

$$(V.62) \quad \psi = \frac{GM}{r c^2} k \left(1 - \frac{E^2}{M^2} \frac{c^4}{32\pi\lambda G^2}\right),$$

$$(V.63) \quad \psi_{55} = \frac{GM}{r c^2} f \left(1 - \frac{E^2}{M^2} \frac{c^4}{32\pi\lambda G^2} \frac{d}{f}\right),$$

$$(V.64) \quad \psi_{44} = -4 \frac{GM}{r c^2} \left[1 + \frac{f}{4} \left(1 - \frac{E^2}{M^2} \frac{c^4}{32\pi\lambda G^2}\right)\right]$$

et nous avons posé, pour simplifier l'écriture,

$$(V.65) \quad d = 4 [(1 - \gamma)^2 + 4 (\gamma^2 + \nu)] / [(1 - \gamma)^2 + 3 (\gamma^2 + \nu)],$$

$$(V.66) \quad f = 4 (\gamma^2 + \nu) / [(1 - \gamma)^2 + 3 (\gamma^2 + \nu)].$$

[Donc $(d - f)/4 = 1$.]

Supposons E négligeable. La concordance entre (V.62) et (V.64) exige que les constantes du lagrangien vérifient la relation

$$(V.67) \quad 1/2 \lambda \chi = d/4.$$

Lorsque le corps central est neutre, ψ_{44} est, à un facteur près, le potentiel de Newton.

Par ailleurs, la solution de (V.60), compte tenu de (V.43), s'écrit

$$(V.68) \quad \psi_{45} = \frac{G E}{r c^2} \sqrt{\frac{2d}{G}}.$$

b) L'expression générale d'un tenseur ψ_{MN} à symétrie sphérique est donnée, en coordonnées cartésiennes, par

$$(V.69) \quad \begin{aligned} \psi_{55} &= -\mathcal{F}, \quad \psi_{54} = \mathcal{G}, \quad \psi_{51} = -\frac{r^1}{r} \mathcal{H}, \\ \psi_{44} &= \mathcal{D}, \quad \psi_{4i} = \frac{x^i}{r} \mathcal{L}, \quad \psi_{ij} = -\mathcal{B} \delta_{ij} - (\mathcal{A} - \mathcal{B}) \frac{x^i x^j}{r^2}, \end{aligned}$$

$\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}, \dots$ étant des fonctions de r seulement ⁽²⁹⁾. Il en résulte

$$(V.70) \quad \psi = 2 \mathcal{B} + \mathcal{A} + \mathcal{F} + \mathcal{D}.$$

D'après (V.62), (V.63) et (V.64), valables dans le cas statique, nous connaissons déjà $\mathcal{F}, \mathcal{D}, \mathcal{G}$ et $2 \mathcal{B} + \mathcal{A}$. Nous savons aussi, avec (V.52), que $\mathcal{L} = \mathcal{H} = 0$.

Si nous portons (V.69) et (V.70) dans (V.55), nous obtenons une équation différentielle simple, qui donne, après intégration, soit $\mathcal{A}$, soit $\mathcal{B}$.

Finalement, nous avons la solution

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \frac{G M \gamma k}{r c^2} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{E^2}{M^2} \frac{c^4}{32 \pi \lambda G^2} \right), \\ \mathcal{A} &= \frac{G M}{r c^2} k (1 - \gamma) \left(1 - \frac{E^2}{M^2} \frac{c^4}{32 \pi \lambda G^2} \right) - \mathcal{F} - \mathcal{D}. \end{aligned}$$

La solution statique à symétrie sphérique se présente donc sous la forme suivante :

$$(V.71) \quad \left\{ \begin{aligned} \psi_{55} &= \frac{G M}{r c^2} F, & \psi_{54} &= \frac{G M}{r c^2} H, & \psi_{51} &= 0, \\ \psi_{44} &= -\frac{G M}{r c^2} D, & \psi_{4i} &= 0, \\ \psi_{ij} &= -\frac{G M}{2 r c^2} \left\{ \gamma K \delta_{ij} + [K(2 - 3\gamma) + 2(F + D)] \frac{x^i x^j}{r^2} \right\}, \end{aligned} \right.$$

où

$$(V.72) \quad \begin{aligned} F &= f - \frac{E^2}{M^2} \frac{d^2}{8 G}, & H &= \frac{E}{M} \sqrt{\frac{2d}{G}}, \\ D &= d \left(1 - \frac{E^2}{M^2} \frac{f}{8 G} \right), & K &= k \left(1 - \frac{E^2}{M^2} \frac{d}{8 G} \right). \end{aligned}$$

⁽²⁹⁾ On peut obtenir ceci par la méthode qu'utilise A. Papapetrou dans [83].

Dans le cas où le corps central est neutre, nous avons plus simplement $F = f$, $H = 0$, $K = k$, $D = d$, avec les expressions (V.65) et (V.66).

Nous pouvons également donner l'expression de $\overset{*}{\eta}_{MN}$ (forme de $\overset{*}{g}_{MN}$ en coordonnées cartésiennes), qui est aussi à symétrie sphérique :

$$(V.73) \quad \left\{ \begin{array}{l} \overset{*}{\eta}_{55} = - \left(1 - \frac{2 G M F}{r c^2 d} \right), \quad \overset{*}{\eta}_{54} = \frac{2 G M H}{r c^2 d}, \quad \overset{*}{\eta}_{51} = 0, \\ \overset{*}{\eta}_{44} = 1 - \frac{2 G M D}{r c^2 d}, \quad \overset{*}{\eta}_{41} = 0, \\ \overset{*}{\eta}_{ij} = - \left[\left(1 + \frac{G M \gamma K}{r c^2 d} \right) \delta_{ij} + \frac{G M K (2 - 3 \gamma) + 2 (F + D) x^i x^j}{r c^2 d} \right]. \end{array} \right.$$

4. Les contrôles expérimentaux. — 1. Trajectoire d'une particule d'épreuve dans le champ à symétrie sphérique. — Nous avons vu que les équations du mouvement d'une particule d'épreuve s'écrivent [équation (III.38)]

$$(V.74) \quad \overset{*}{v}^R \partial_R (\overset{*}{\eta}_{MP} \overset{*}{v}^M) = \frac{1}{2} \overset{*}{v}^M \overset{*}{v}^R \partial_P \overset{*}{\eta}_{MR}, \text{ soit encore } (\overset{*}{\eta}_{MP} x'^M)' = \frac{1}{2} x'^M x'^R \partial_P \overset{*}{\eta}_{MR}$$

si nous désignons par ' les dérivées par rapport à $\overset{*}{S}$: $x'^M = dx^M/d\overset{*}{S}$.

a) Pour $P = 5$, puis $P = 4$, (V.74) donne manifestement

$$(V.75) \quad \overset{*}{v}_5 = \text{Cte} = h_5, \quad \overset{*}{v}_4 = \text{Cte} = h_4.$$

(Ceci n'est pas surprenant : h_5 est une intégrale première des géodésiques de $d\overset{*}{S}$ dans V_5^0 ; h_4 est une intégrale première pour les trajectoires dans l'espace-temps.)

Avec (V.73), les deux relations (V.75) deviennent

$$(V.76) \quad \begin{aligned} - \left(1 - \frac{2 G M F}{r c^2 d} \right) x'^5 + 2 \frac{G M H}{r c^2 d} x'^4 &= h_5, \\ \left(1 - \frac{2 G M D}{r c^2 d} \right) x'^4 + 2 \frac{G M H}{r c^2 d} x'^5 &= h_4; \end{aligned}$$

nous pouvons en déduire x'^4 et x'^5 :

$$(V.77) \quad \begin{aligned} &\left[\left(1 - 2 \frac{G M D}{r c^2 d} \right) \left(1 - 2 \frac{G M F}{r c^2 d} \right) + \left(2 \frac{G M H}{r c^2 d} \right)^2 \right] x'^5 = \\ &= 2 \frac{G M H}{r c^2 d} h_4 - \left(1 - 2 \frac{G M D}{r c^2 d} \right) h_5, \\ &\left[\left(1 - 2 \frac{G M D}{r c^2 d} \right) \left(1 - 2 \frac{G M F}{r c^2 d} \right) + \left(2 \frac{G M H}{r c^2 d} \right)^2 \right] x'^4 = \\ &= 2 \frac{G M H}{r c^2 d} h_5 + \left(1 - 2 \frac{G M F}{r c^2 d} \right) h_4. \end{aligned}$$

b) Pour $P = i$, (V.74) devient

$$(V.78) \quad \begin{aligned} -2 \left(1 + \frac{G M \gamma k}{r c^2 d} \right) x'^i + 2 \frac{G M \gamma k}{r c^2 d} x'^i r' + \\ + \frac{G M}{r c^2} \left[\frac{(2 - 3 \gamma) K + 2 (F + D)}{d} \left(3 \frac{r'^2}{r^2} - 2 \sum \frac{x'^i x'^j}{r^2} \right) - \right. \end{aligned}$$

$$- \frac{(4 - 5 \gamma) K + 4 (F + D)}{d} \sum \frac{(x'^j)^2}{r^2} \Big] x^1 = \\ 2 \frac{G M}{r c^2} \left[\frac{D (x'^4)^2}{d} - 2 \frac{H x'^4 x'^5}{d} - \frac{F (x'^5)^2}{d} \right] x^1.$$

D'après cette équation, la trajectoire est plane ; si, en effet, $x^1 = x'^1 = 0$ à un instant donné, pour i fixé, alors $x'^i = 0$; choisissons ces coordonnées de façon que le plan du mouvement soit le plan $x^1 x^2$ (ou xy).

(V.78) représente donc deux équations ; en les combinant convenablement, nous obtenons

$$- 2 \left(1 + \frac{G M \gamma K}{r c^2 d} \right) (x'^1 x^2 - x'^2 x^1) + 2 \frac{G M \gamma K}{r^2 c^2 d} (x'^1 x^2 - x'^2 x^1) r' = 0.$$

Cette équation s'intègre pour donner

$$(V.79) \quad x'^1 x^2 - x'^2 x^1 = \frac{h}{c} \left(1 + \frac{G M \gamma K}{r c^2 d} \right)^{-1},$$

où h est une constante d'intégration.

c) Nous pourrions maintenant faire une nouvelle combinaison des équations (V.78), qui, après élimination de x'^4 et x'^5 et intégration, nous fournirait l'expression de $\sum (x'^i)^2$. Il est plus rapide de partir de la relation $\gamma_{MN} x'^M x'^N = 1$. Elle s'écrit, avec (V.73),

$$- \left(1 - 2 \frac{G M F}{r c^2 d} \right) (x'^5)^2 + 4 \frac{G M H}{r c^2 d} x'^5 x'^4 + \left(1 - 2 \frac{G M D}{r c^2 d} \right) (x'^4)^2 = \\ 1 + \left(1 + \frac{G M \gamma K}{r c^2 d} \right) \sum (x'^i)^2 + \frac{G M (2 - 3 \gamma) K + 2 (F + D)}{r c^2 d} r'^2.$$

Le premier membre, selon (V.76), n'est autre que $h_5 x'^5 + h_4 x'^4$; nous y portons (V.77) et nous obtenons, après avoir négligé les termes en $(1/c)^5$ et plus,

$$(V.80) \quad \left(1 + \frac{G M \gamma K}{r c^2 d} \right) \sum (x'^i)^2 + \frac{G M (2 - 3 \gamma) K + 2 (F + D)}{r c^2 d} r'^2 = \\ = 2 \frac{G M P}{r c^2 d} - \left(\frac{2 G M}{r c^2} \right)^2 \frac{Q}{d^2} + I = 0,$$

où

$$P = D h_1^2 + 2 H h_4 h_5 - F h_5^2, \\ Q = (D + F) (D h_5^2 + 2 H h_4 h_5 - F h_4^2) - (h_4^2 - h_5^2) (H^2 + D F), \\ I = 1 + h_5^2 - h_4^2.$$

d) Passons en coordonnées polaires r, φ dans le plan $x^1 x^2$; (V.79) et (V.80) s'écrivent

$$(V.81) \quad \left\{ \begin{aligned} r^2 \varphi' &= \frac{h}{c} \left(1 + \frac{G M \gamma K}{r c^2 d} \right)^{-1}, \\ r'^2 \left[1 + 2 \frac{G M (1 - \gamma) K + F + D}{r c^2 d} \right] + \\ + r^2 \varphi'^2 \left(1 + \frac{G M \gamma K}{r c^2 d} \right) &= -I + 2 \frac{G M P}{r c^2 d} + 4 \frac{G^2 M^2 Q}{r^2 c^4 d^2}. \end{aligned} \right.$$

La première de ces deux équations est l'analogue de la loi des aires classique ; si nous y portons l'expression de x'^4 , supposons $1/r$ petit et négligeons les termes en $1/r^2 c^2$, nous obtenons $r^2 d\varphi/dt = \hbar/h_0$.

Pour obtenir l'équation de la trajectoire, nous posons $u = 1/r$; des deux équations (V.81) résulte la suivante :

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 \left[1 + 2 \frac{G M}{c^2} u \frac{(1-\gamma) K + F + D}{d}\right] + \left(1 + \frac{G M \gamma K}{c^2 d} u\right) u^2 = \frac{c^2}{h^2} \left(-I + 2 \frac{G M P}{c^2 d} u + 3 \frac{G^2 M^2 Q}{c^4 d^2} u^2\right) \left(1 + \frac{G M \gamma K}{c^2 d} u\right)^2.$$

Après différentiation et si nous supposons u petit, nous avons

$$(V.82) \quad \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + \left\{1 - 4 \frac{G^2 M^2}{c^2 h^2} \left[Q - P R + I \gamma K \left(R - 3 \frac{\gamma K}{4}\right)\right]\right\} u = \frac{G M P + R I}{h^2 d},$$

où $R = (1 - 2 \gamma) K + F + D$.

2. *Avance du périhélie des planètes.* — D'après la théorie de Newton, une planète décrit suivant la loi des aires une orbite d'équation

$$(V.83) \quad \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{G M}{h_0^2}.$$

C'est une ellipse

$$(V.84) \quad u = (G M / h_0^2) (1 + e \cos \varphi).$$

En relativité générale, (V.83) est remplacé par

$$(V.85) \quad \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{G M}{h_0^2} + 3 \frac{G M}{c^2} u^2.$$

La trajectoire est une ellipse en précession. Après une révolution de la planète, son périhélie présente une avance

$$(V.86) \quad \delta\varphi = 6 \pi G^2 M^2 / c^2 h_0^2$$

par rapport à la position newtonienne [72]. (On voit qu'elle provient d'un terme en u^2 .) On sait que l'observation confirme sensiblement ce résultat.

Bien que ce ne soit pas le point de vue adopté en général, on peut traiter le problème du mouvement planétaire à partir de l'équation qui se rapporte à une particule chargée, dans le champ d'un corps central chargé. On utilise à cette fin les équations d'Einstein et Maxwell [75, 90].

On obtient, pour la trajectoire,

$$(V.87) \quad \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{G M}{h_0^2} \left(1 - \frac{1}{G M m} \frac{E \varepsilon}{m}\right) + \frac{E^2}{c^2 h_0^2} \left(\frac{\varepsilon^2}{m^2} - G\right) u + 3 \frac{G M}{c^2} u^2 - 2 \frac{G E^2}{c^4} u^3 + \dots,$$

alors qu'en mécanique classique

$$(V.88) \quad \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{G M}{h_0^2} \left(1 - \frac{1}{G M m} \frac{E \varepsilon}{m}\right);$$

E et M sont les charge et masse du corps central, ε et m les charge et masse de la particule d'épreuve.

Lorsque $E = 0$, (V.88) et (V.87) redonnent évidemment (V.83) et (V.84). De l'équation (V.87) résulte l'avance du périhélie :

$$(V.89) \quad \delta\varphi = 6\pi \frac{G^2 M^2}{c^2 h_0^2} \left(1 - \frac{1}{G} \frac{E \varepsilon}{M m} \right) + \frac{\pi E^2}{c^2 h_0^2} \left(\frac{\varepsilon^2}{m^2} - G \right).$$

Nous avons, pour notre part, obtenu l'équation (V.82) que nous pouvons écrire

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{1}{p}$$

et dont la solution est $u = (1 + e \cos \rho \varphi)/p$.

Par comparaison à l'équation (V.88) que nous devons retrouver en première approximation, nous posons

$$\frac{1}{p} = \frac{G M}{h_0^2} \left(1 - \frac{1}{G} \frac{E \varepsilon}{M m} \right),$$

soit

$$(V.90) \quad P + R I = \left(1 - \frac{1}{G} \frac{E \varepsilon}{M m} \right) d h_4^2.$$

L'avance du périhélie obtenue est $2\pi(1 - \rho)$ et

$$\rho \simeq 1 - 2 \frac{G^2 M^2 Q - P R + I \gamma K [R - (3 \gamma K/4)]}{c^2 h^2 d^2}.$$

Cette avance résulte ici d'un terme en u , même si $E = 0$.

Puisque les résultats de la relativité générale sont vérifiés, nous ajusterons les constantes dont nous disposons de manière à retrouver ces résultats ⁽³⁰⁾; nous posons donc ici, pour que l'avance soit correcte,

$$(V.91) \quad \frac{4 G^2 M^2}{d^2 h^2} \left[Q - P R + I \gamma K \left(R - 3 \frac{\gamma K}{4} \right) \right] = \\ = 6 G^2 M^2 \left(1 - \frac{1}{G} \frac{E \varepsilon}{M m} \right) + E^2 \left(\frac{\varepsilon^2}{m^2} - G \right).$$

Nous avons donc obtenu les deux conditions (V.90) et (V.91); elles ne se simplifient pas de façon notable si l'on suppose $E = 0$. Nous pouvons en tout cas considérer qu'elles déterminent les constantes h_4 et h_5 qui caractérisent le corps d'épreuve.

3. *Courbure des rayons lumineux dans un champ de gravitation.* — M. Moshinsky [57] montre que la théorie de Birkhoff permet de prévoir la courbure des rayons lumineux dans un champ de gravitation en considérant l'interaction de celui-ci avec un champ électromagnétique.

Du principe variationnel $\delta \int \sqrt{-g} (L + \psi_{\mu\nu} \tau^{\mu\nu} + L_e) = 0$, où $\tau^{\mu\nu}$ est le tenseur de Maxwell et L_e le lagrangien correspondant, il déduit les équations du champ électromagnétique en présence du champ gravifique. Ces équations mettent en

⁽³⁰⁾ La théorie de Jordan et Thiry, dans la forme que lui donnent les équations (IV.12) et (IV.19), ne prévoit pas l'avance correcte [76].

évidence une induction, donc un indice créé dans le vide par le champ gravitationnel. Le principe de Fermat donne alors les trajectoires des photons.

En relativité générale, on peut dire que l'écart entre le ds^2 de Minkowski et le ds^2 de Schwarzschild traduit également le fait que le champ de gravitation doue le milieu d'une constante diélectrique et d'une perméabilité magnétique apparentes. (On arrive à cette conclusion soit par la considération des équations de Maxwell mêmes [83], soit par l'application du théorème de Fermat relativiste [86].)

Nous emploierons ici la méthode de Moshinsky ; nous considérons deux champs, décrits par les potentiels ψ_{MN} et ψ_{MN} : nous partons du lagrangien

$L_1 + \xi \psi_{MN} T_{MN}^{MN} + L_2$, avec les notations suivantes :

L_1 est le lagrangien [tel que (V.2)] du premier champ ;

L_2 est le lagrangien [tel que (V.2)] du second champ ;

T_{MN}^{MN} est le tenseur d'impulsion-énergie du second champ, c'est-à-dire le « tenseur métrique » déduit de $L_2 \sqrt{-g}$;

ξ est un coefficient d'interaction.

Les équations du champ 2 en présence du champ 1 s'obtiennent après variation de ψ_{MN} ,

$$(V.92) \quad -\partial_R A_{MN}^{R,AB} + \xi [\delta(\psi_{MN} T_{MN}^{MN}) / \delta \psi_{AB}] = 0.$$

Supposons que le champ 2 soit un champ purement électromagnétique ; nous annulons tous les potentiels autres que $\psi_{\mu 5}$. Nous avons donc

$$(V.93) \quad -\partial_\rho A_{MN}^{\rho, \nu 5} + \xi [\delta(\psi_{MN} T_{MN}^{MN}) / \delta \psi_{\nu 5}] = 0.$$

Supposons de plus que le champ 1 soit un champ statique à symétrie sphérique. Alors $\psi_{51} = \psi_{41} = 0$.

Avec (V.4), (V.14) et (V.35), nous obtenons pour (V.93).

$\partial_\rho \varphi^{\nu \rho} + \lambda \xi \partial_\rho (2 \psi^{\rho \sigma} \varphi^\nu_\sigma + 2 \psi^{\mu \nu} \varphi^\rho_\mu + 4 \psi \varphi^{\nu \rho} + 4 \psi_{55} \varphi^{\nu \rho}) = 0$
 ($\varphi^{\nu \rho}$ est le champ électromagnétique dérivé de $\psi_{\nu 5}$; nous supprimons l'indice du champ 1, qui n'est plus indispensable).

Si nous utilisons les expressions (V.71) de la solution à symétrie sphérique, nous voyons que l'équation ci-dessus s'écrit $\partial_\rho f^{\nu \rho} = 0$, avec

$$f^{ij} = \frac{1}{\mu} \varphi^{ij} - (\delta^i_1 \sigma^{jk} - \delta^j_1 \sigma^{ik}) \varphi^1_k, \quad f^{i4} = \epsilon \varphi^{i1} + \sigma^{ik} \varphi^1_k,$$

où

$$\begin{aligned} \epsilon &= 1 - \lambda \xi (G M / r c^2) (K - 3 F + 2 D - \gamma K), \\ 1/\mu &= 1 - \lambda \xi (G M / r c^2) (K - 3 F - 2 \gamma K), \\ \sigma^{jk} &= \lambda \xi (G M / r c^2) [K (2 - 3 \gamma) + 2 (F + D)] x^j x^k / r^2. \end{aligned}$$

Nous pouvons donc dire, par comparaison aux équations de Maxwell, que le champ 1 crée un indice $n = \sqrt{\epsilon \mu}$, soit

$$n \simeq 1 - \lambda \xi (G M / 2 r c^2) (2 D + \gamma K).$$

On sait que la déviation observable des rayons correspond à un indice apparent $n = 1 + 2 (G M / r c^2)$ et qu'elle a pour valeur

$$(V.94) \quad \delta = 4 G M / R c^2.$$

Dans le cas où l'on considère des corps chargés et où l'on utilise la théorie d'Einstein et Maxwell, la déviation calculée est plutôt [90]

$$(V.94') \quad \delta = 4 \frac{G M}{R c^2} - \frac{3 \pi G E^2}{4 R^2 c^4}.$$

La charge du corps central tend donc à atténuer la déviation ; la différence, en fait, est tout à fait négligeable devant le premier terme. Nous nous contenterons donc, en ce qui nous concerne, d'un bon accord avec (V.94). Il nous faut poser pour cela

$$(V.95) \quad \lambda \xi (2 D + \gamma K) + 4 = 0.$$

Ceci est une relation entre les coefficients γ et ν du lagrangien.

La modification de la déviation (V.94), due à la charge E , est en $1/R^2$ dans (V.94'). Pour nous, elle est en $1/R$, comme le terme dû à M . Ceci semble logique dans une théorie minkowskienne, où les lois de force de Coulomb et de Newton ont la même forme.

Si nous n'avions pas, au début de ce calcul, fait l'hypothèse que les potentiels autres que $\psi_{\mu 5}$ sont nuls, nous aurions vu apparaître dans (V.92), à moins de supposer à priori le corps central dépourvu de charge, des termes contenant ψ_{45} et le champ de gravitation 2. Autrement dit, nous aurions pu essayer de définir un indice « réciproque » du précédent, c'est-à-dire l'effet d'un champ électrostatique sur la propagation des gravitons. Mais la forme des termes en question est loin de rendre leur interprétation aisée.

4. *Déplacement vers le rouge des raies spectrales.* — Le troisième effet peut s'expliquer à l'aide de l'équation de continuité (V.19), qui exprime une modification de la masse par le champ étudié (cf. [67]). Elle s'écrit, en effet,

$$\partial_\mu [m \omega u^\mu / \sqrt{1 + (v_5)^2}] = 0.$$

La masse m devenant $m(1 - \eta)$, l'énergie E_s du niveau s , pour un atome situé dans le champ considéré, devient $E'_s = (1 - \eta) E_s$; la fréquence ν qui correspond à la transition $s \rightarrow p$ devient $\nu' = (1 - \eta) \nu$. D'où un décalage $\Delta\nu/\nu = -\eta$.

Nous avons ici

$$\omega \sim 1 - \frac{G M P}{r c^2 d}$$

et, si nous supposons $h_4 = 1$, $h_5 = 0$, $\eta = G M / r c^2$.

Ce résultat est satisfaisant. Remarquons cependant que le procédé est très rudimentaire ⁽³¹⁾.

REMARQUES. — a) Nous pourrions, sans préjudice, annuler le potentiel ψ_{55} . D'une part, les expressions (V.35) de $t^{\mu\nu}$ et (V.20) de $A^{\mu\nu}$ seraient très satisfaisantes ; d'autre part, nous pouvons constater que l'influence de ψ_{55} est sans importance sur le premier effet et nulle sur le second.

⁽³¹⁾ W. E. Thirring [64], pour qui la « vraie » métrique est $g_{\mu\nu}^*$, utilise par son intermédiaire la même méthode qu'en relativité générale.

b) Nous avons finalement deux relations (V.67) et (V.95) entre les deux coefficients du lagrangien. Ils sont donc déterminés.

Je suis heureuse de pouvoir exprimer ici toute ma gratitude à M^{me} M.-A. Tonnelat. Je lui suis surtout infiniment reconnaissante pour la patience et la bienveillance avec lesquelles elle a dirigé ce travail.

Je remercie M^r A. Lichnerowicz de m'avoir fait l'honneur d'accepter la présidence du jury et de m'avoir parrainée au Centre National de la Recherche Scientifique.

Je suis reconnaissante à M^{me} Y. Choquet d'avoir bien voulu faire partie du jury.

RÉFÉRENCES

Sur les identités (chap. I)

- [1] F. J. BELINFANTE, *Physica*, t. **6**, 1939, p. 887.
- [2] F. J. BELINFANTE, *Physica*, t. **7**, 1940, p. 449.
- [3] A. EINSTEIN, *Ber. deut. phys. Ges.*, 1916, p. 1111.
- [4] P. FREUD, *Ann. Math.*, t. **40**, 1939, p. 417.
- [5] E. L. HILL, *Rev. mod. Physics*, t. **23**, 1951, p. 253.
- [6] K. KRAUS, *Zeits. Physik*, t. **163**, 1961, p. 240.
- [7] N. MIZKJEVITSCH, *Ann. Physik*, t. **1**, 1958, p. 320.
- [8] E. NOETHER, *Göttingen Nachr.*, 1918, p. 235.
- [9] W. PAULI, *Rev. mod. Physics*, t. **13**, 1941, p. 203.
- [10] L. ROSENFELD, *Mém. Acad. Roy. Belg.*, t. **18**, 1940, n° 6.
- [11] R. C. TOLMAN, *Phys. Review*, t. **35**, 1930, p. 875.
- [12] A. TRAUTMAN, *Bull. Ac. Polon. Sc.*, t. **4**, 1956, p. 675.
- [13] A. TRAUTMAN, *Gravitation*, éd. L. Witten, New York, 1962.
- [14] H. WEYL, *Temps, espace, matière*, éd. A. Blanchard, Paris, 1922, p. 206.
- [15] J. WINOGRADSKI, *Cah. Phys.*, t. **10**, 1956, n° 67, p. 1.

Sur le tenseur d'impulsion-énergie (§ II.1)

- [16] L. BEL, Thèse, Paris, 1960.
- [17] P. G. BERGMANN, *Phys. Review*, t. **112**, 1958, p. 287.
- [18] P. G. BERGMANN & R. THOMSON, *Phys. Review*, t. **89**, 1953, p. 400.
- [19] A. CAPELLA, *Cah. Phys.*, t. **16**, 1962, p. 330.
- [20] H. CHEVALIER, *C. r. Ac. Sc.*, t. **254**, 1962, p. 1383.
- [21] W. R. DAVIS & M. K. MOSS, *Nuovo Cim.* [10], t. **27**, 1963, p. 1492.
- [22] J. N. GOLDBERG, *Phys. Review*, t. **111**, 1958, 315.
- [23] A. KOMAR, *Phys. Review*, t. **113**, 1959, p. 934.
- [24] C. MØLLER, *K. Danske Vidensk. Selsk. mat.-fys. Medd.*, t. **31**, 1959, n° 14, 39 p.
- [25] C. MØLLER, *K. Danske Vidensk. Selsk. mat.-fys. Skr.*, t. **1**, 1961, n° 10, 50 p.
- [26] A. PAPAPETROU, *Proc. Roy. Irish Ac.*, t. **52**, 1948, p. 11.
- [27] A. PAPAPETROU, *Phil. Mag.*, t. **40**, 1949, p. 937.
- [28] C. PELLEGRINI, *Nuovo Cim.* [10], t. **22**, 1961, p. 427.
- [29] D. W. SCIAMA, *Proc. Cambridge phil. Soc.*, t. **54**, 1958, p. 72.
- [30] M. SCHOENBERG, *Phys. Review*, t. **59**, 1941, p. 616.
- [31] K. P. STANYUKOVICH, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, t. **148**, 1963, p. 321.
- [32] A. TAUB, *Jl math. Physics.*, t. **2**, 1961, p. 787.

Sur les équations du mouvement (§ II.2)

- [33] V. A. FOCK, *The theory of space, time and gravitation*, 1959, p. 156.
- [34] L. INFELD, *Bull. Ac. Polon. Sc.*, t. **5**, 1957, p. 491.
- [35] G. KALMAN, *Phys. Review*, t. **123**, 1961, p. 384.
- [36] PHAM MAU QUAN, *C. r. Ac. Sc.*, t. **251**, 1960, p. 639.
- [37] H. RUND, *Ann. Physik*, t. **7**, 1961, p. 17.
- [38] H. RUND, *Nuovo Cim.* [10], t. **23**, 1962, p. 227.
- [39] A. TRAUTMAN, *Bull. Ac. Polon. Sc.*, t. **7**, 1957, p. 721.

Sur les théories euclidiennes de la gravitation (chap. III)

- [40] F. J. BELINFANTE, *Phys. Review*, t. **98**, 1955, p. 793.
- [41] F. J. BELINFANTE, *Rev. Mex. Fis.*, t. **4**, 1955, p. 192.
- [42] F. J. BELINFANTE & J. C. SWIHART, *Ann. Physics*, t. **1**, 1957, p. 168.

- [43] O. BERGMANN, *Amer. Jl Physics*, t. **24**, 1956, p. 38.
- [44] G. D. BIRKHOFF, *Proc. Nat. Ac. Sc.*, t. **29**, 1943, p. 231.
- [45] A. CAPELLA, *C. r. Ac. Sc.*, t. **258**, 1964, p. 87.
- [46] A. EINSTEIN, *Ber. deut. phys. Ges.*, 1918, p. 154.
- [47] M. FIERZ, *Helv. phys. Acta*, t. **12**, 1939, p. 3.
- [48] M. FIERZ & W. PAULI, *Proc. Royal Soc.*, t. **173**, 1939, p. 211.
- [49] S. N. GUPTA, *Phys. Review*, t. **96**, 1954, p. 1683.
- [50] S. N. GUPTA, *Rev. mod. Physics*, t. **29**, 1957, p. 334.
- [51] L. HALPERN, *Bull. Ac. Roy. Belg.*, t. **49**, 1963, p. 226.
- [52] S. LEDERER & M.-A. TONNELAT, *Nuovo Cim.* (à paraître).
- [53] S. MAVRIDÈS, *C. r. Ac. Sc.*, t. **254**, 1962, p. 437.
- [54] S. MAVRIDÈS, *C. r. Ac. Sc.*, t. **255**, 1962, p. 2232.
- [55] S. MAVRIDÈS, *C. r. Ac. Sc.*, t. **257**, 1963, p. 4139.
- [56] J. G. MAXWELL, *Scientific Papers*, t. **1**, p. 570.
- [57] M. MOSHINSKY, *Phys. Review*, t. **80**, 1950, p. 514.
- [58] G. NORDSTRÖM, *Ann. Physik*, t. **43**, 1914, p. 1101.
- [59] A. PAPAPETROU, *Praktika Ac. Athènes*, t. **19**, 1944, p. 224.
- [60] A. PERES, *Nuovo Cim.* [10], t. **28**, 1963, p. 865.
- [61] M. POYET, *C. r. Ac. Sc.*, t. **256**, 1963, p. 3595.
- [62] N. ROSEN, *Phys. Review*, t. **57**, 1940, p. 147.
- [63] N. ROSEN, *Ann. Physics*, t. **22**, 1963, p. 1.
- [64] W. E. THIRRING, *Ann. Physics*, t. **18**, 1961, p. 96.
- [65] M.-A. TONNELAT, *Ann. Physique* [11], t. **17**, 1942, p. 158.
- [66] M.-A. TONNELAT, *C. r. Ac. Sc.*, t. **253**, 1961, p. 2475.
- [67] M.-A. TONNELAT, *Rendi conti Ac. Lincei* (à paraître).
- [68] M.-A. TONNELAT & S. LEDERER, *C. r. Ac. Sc.*, t. **256**, 1963, p. 371.
- [69] H. WEYL, *Amer. Jl Math.*, t. **66**, 1944, p. 591.
- [70] H. YILMAZ, *Phys. Review*, t. **111**, 1958, p. 1417.

Sur le formalisme pentadimensionnel et les points de comparaison dans V_4 (chap. IV et V)

- [71] L. BEL, *Ann. Inst. H. Poincaré*, t. **17**, 1961, p. 37.
- [72] J. CHAZY, *La théorie de la relativité et la mécanique céleste*, éd. Gauthier-Villars, Paris, 1928, p. 111.
- [73] P. S. FLORIDES, *Proc. Cambridge phil. Soc.*, t. **58**, 1962, p. 110.
- [74] F. HENNEQUIN, Thèse, Paris, 1956.
- [75] G. B. JEFFERY, *Proc. Royal Soc.*, t. **99**, 1921, p. 123.
- [76] K. JUST, *Zeits Naturf.*, t. **14a**, 1959, p. 751.
- [77] S. LEDERER, *C. r. Ac. Sc.*, t. **252**, 1961, p. 992.
- [78] S. LEDERER, *Jl Phys.* [8], t. **23**, 1962, p. 381.
- [79] H. LEUTWYLER, *C. r. Ac. Sc.*, t. **251**, 1960, p. 2292.
- [80] A. LICHNEROWICZ, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, éd. Masson, Paris, 1955, p. 163.
- [81] L. MARIOT & P. PIGEAUD, *C. r. Ac. Sc.*, t. **257**, 1963, p. 621.
- [82] C. MÖLLER, *The theory of relativity*, Oxford Univ. Press, 1952, p. 305.
- [83] A. PAPAPETROU, *Proc. Roy. Irish Ac.*, t. **52**, 1948, p. 69.
- [84] G. PETIAU, *C. r. Ac. Sc.*, t. **212**, 1941, p. 1126.
- [85] PHAM MAU QUAN, *C. r. Ac. Sc.*, t. **242**, 1956, p. 875.
- [86] PHAM MAU QUAN, *Arch. rat. Mech. anal.*, t. **1**, 1957, p. 54.
- [87] P. PIGEAUD, Thèse, Paris, 1962.
- [88] Y. THIRY, Thèse, Paris, 1950.
- [89] M.-A. TONNELAT, *C. r. Ac. Sc.*, t. **254**, 1962, p. 225.
- [90] J. HAAG, *Le problème de Schwarzschild*, éd. Gauthier-Villars, Paris, 1931.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION	1
NOTATIONS	3
I. Identités déduites d'un lagrangien. Tenseur « canonique » et tenseur « métrique »	3
1. Les identités	4
1. Calcul des identités	4
2. Tenseur « métrique » et tenseur « canonique »	6
3. Forme covariante des identités	6
4. Equations de champ	7
2. Deux exemples : théories d'Einstein et de Maxwell	8
1. Relativité générale	8
2. Electromagnétisme maxwellien	9
II. Equations du mouvement et tenseur d'impulsion-énergie.	10
1. Le problème du tenseur d'impulsion-énergie du champ	10
1. La conservation de l'énergie en relativité générale	11
2. La conservation de l'énergie en électromagnétisme	13
2. Les équations du mouvement déduites d'un lagrangien	13
1. Identités et lois du mouvement dans le cas de particules ponctuelles	13
2. Application : champs à potentiel scalaire, vectoriel ou tensoriel	15
3. Identités et lois du mouvement dans le schéma fluide continu. Application	17
4. L'analogie entre théorie vectorielle et théorie tensorielle	18
III. Théories euclidiennes de la gravitation. Tenseur d'impulsion-énergie gravitationnelle.	20
1. Les théories euclidiennes de la gravitation	20
1. Les retranscriptions de la relativité générale	20
2. Représentation quadridimensionnelle des particules de spin 2	21
3. Equations du mouvement et loi de force	23
4. Equations du mouvement et conservation de l'énergie	23
5. Equations du mouvement et déduction lagrangienne	23
2. Le tenseur « métrique » comme tenseur d'impulsion-énergie	25
1. Tenseur « métrique » et équations du mouvement	25
2. Expression du tenseur métrique	27
IV. Formalisme pentadimensionnel. La particule de spin total maximum 2	29
1. Les trajectoires des particules d'épreuve en théorie de Jordan et Thiry	29
1. Les particules neutres en relativité générale	29
2. Champs et inductions électromagnétiques	30
3. Les particules chargées en relativité générale	30
4. Les trajectoires des particules en théorie de Jordan et Thiry	31
5. Le principe de Fermat en théorie de Jordan et Thiry	31
6. La conservation de l'énergie en théorie de Jordan et Thiry	32
2. Représentation pentadimensionnelle des particules de spin maximum 2	33
1. Les équations de Jordan et Thiry approchées	33
2. Les équations de la particule de spin total maximum 2	34
3. Le champ $\psi_{[MN]P}$ et la définition d'une induction	35

V. Formalisme pentadimensionnel (<i>suite</i>)	36
1. Equation de champ et équations du mouvement.....	37
1. Le lagrangien et les équations de champ.....	37
2. Les équations de champ et l'invariance de jauge.....	38
3. Les équations du mouvement.....	38
2. Champ électromagnétique et champ de gravitation.....	39
1. Les équations de la gravitation.....	39
2. Les équations de l'électromagnétisme.....	40
3. La quinzième équation.....	40
4. L'impulsion énergie du champ.....	41
3. Approximation des champs faibles. Champs statiques.....	41
1. L'approximation newtonienne.....	41
2. Les équations de champ dans le cas statique.....	42
3. La solution statique à symétrie sphérique.....	43
4. Les contrôles expérimentaux.....	45
1. Trajectoire d'une particule dans le champ à symétrie sphérique.....	45
2. Avance du périhélie des planètes.....	47
3. Courbure des rayons lumineux dans un champ de gravitation.....	48
4. Déplacement vers le rouge des raies spectrales.....	50
Remarques.....	50
RÉFÉRENCES	51

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

Connexion finslérienne

Vu et approuvé :

Paris, le 23 avril 1964

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

Marc ZAMANSKY

Vu et Permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

Jean ROCHE

M. JULIA	T Etudes des Moléculaires complexes.	CHEVAUGEON	T Botanique (Orsay).
LENDER	T Biol. Animale SPCN (Orsay).	KAHANE	T Mathématiques (Orsay).
MAGAT	T Physico-Chimie des radioéléments.	SAMUEL	T Mathématiques ENS féminines.
M ^{lle} QUINTIN	T Electrochimie.	KOURGANOFF	T Astronomie (Orsay).
MONOD	T Chimie du métabolisme.	THIRY	T Mécanique céleste.
BENOIT	T Physiol. animale (Orsay).	ABELES	T Physique SPCN.
DE POSSEL	T Analyse numérique.	AMAT	T Physique PCB.
CHARLOT	T Chimie analytique.	AUBOIN	T Géologie.
LEMEE	T Ecologie Vég. (Orsay).	M ^{me} BENOIT-GUEU- TAL	T Phys. Nucléaire et radioactivité (Orsay).
GUERIN	T Chimie MPC (Orsay).	BOUGIS	T Biologie marine (Villefranche/ Mer).
CHATELET M.	T Chimie PCB.	BRUHAT	T Mathématiques MPC.
JEAN	T Physique Nucl. (Orsay).	BRUNN	T Géologie historique (Orsay).
MATTLER	T Physique SPCN.	CHABBAL	T Physique MGP (Orsay).
BERGERARD	T Zoologie (Orsay).	DEHEVELS	T Mathématique Propé.
BERTEIN	T Electronique (Orsay).	D'ESPAGNAT	T Physique théorique (Orsay).
BOUSSIÈRES	T Radiochimie.	FURON	T Géologie SPCN.
M ^{me} COUTURE	T Thermo. et Méca. Physique.	M ^{me} GANS	T Génétique.
ELLENBERGER	T Géologie des grandes régions du globe.	GENEVES	T Biologie végétale PCB.
FRANC	T Biologie animale PCB.	GUILBERT	T Physique (CUS Orléans).
SCHNELL	T Botanique tropicale.	HUPE	T Pétrographie.
STOLKOWSKI	T Physiologie végétale.	HOLLANDE	T Biologie générale.
ACHER	T Chimie Biologique.	LIONS	T Analyse numérique.
BAUDOIN	T Biologie animale PCB.	MAITTE	T Chimie PCB.
BEAUMONT	T Biologie animale SPCN.	MEYER	T Physique propédeutique.
BLAMONT	T Géophysique-ionosphère.	NICOLAS	T Géologie appliquée.
BOURREAU	T Botanique.	PANIGEL	T Biologie générale.
CURIE D.	T Physique MGP.	RAVIER	T Pétrographie.
DURAND-DELGA ..	T Géologie.	ROSEAU	T Méca. théor. des fluides.
FREON	T Chimie organique (Orsay).	ROUBINE	T Electronique.
HELLER	T Physiol. végétale.	SILBER	T Chimie PCB.
TORTRAT	T Calcul des Probabilités.	UEBERSFELD	T Electronique.
CAILLEUX	T Géologie (SPCN).	YVON	T Théories Physiques.
MAGNAN	T Physique SPCN.	HERVE	T Mathématiques.
DAUDEL	T Mécanique ondulatoire appli. à la chimie Théor. et à la Phys. Nucléaire.	NERON	T Mathémat. MPC (Orsay)
M ^{lle} FOURCROY ...	T Biologie végét. SPCN.	M ^{me} PECKER-Wi- MEL	T Astrophysique.
M ^{me} CHOQUET-BRU- HAT	T Mécan. Analytique et Méca. céleste.	BALKANSKY	T Physique MPC.
M ^{lle} VEIL	T Physiologie générale.	LE CORRE	T Electricité.
LWOFF	T Microbiologie.	DELCOIX	T Physique théorique (Orsay).
SIESTRUNCK	T Mécan. Phys. et Expérим.	GOURDIN	T Phys. Théor. des Hautes-Énergies (Orsay).
LACOMBE	T Métallurgie des métaux Nucléaires (Orsay).	LEHMANN	T Phys. Exp. des Hautes Énergies (Orsay).
BROCHARD	T Physique PCB (Orsay).	NATAF	T Physique nucléaire et radioactivité (Orsay).
CABANNES	T Mécanique générale.	ECHALIER	T Biologie animale PCB.
LESIEUR	T Mathématiques I (Orsay).	BARRAUD	T Physiologie cellulaire.
MAZET	T Méca. générale (Orsay).	LIORÉ	T Physiologie végét. Orsay.
CAIRE	T Géographie phys. et Géol. Dynamique.	DARS	T Géologie struc. et Géol. appliquée.
COMOLET	T Mécanique des Fluides.	CAMEFORT	T Botanique (aggrégation).
CORABOEUF	T Physiol. animale (Orsay).	VICHNIEWSKY	T Mécanique industrielle.
DELLOUE	T Physique de l'exosphère.	BLAQUIÈRE	T Electronique (Orsay).
GORENFLOT	T Botanique II (Orsay).	ARNOUS	T Physique théorique.
HOUILLOIN	T Biologie animale PCB.	TATIBOUET	T Chimie (CSU Orléans).
JULLIEN J.	T Chimie SPCN (Orsay).	MALLIAVIN	T Mathématique propé. Orsay.
MALGRANGE	T Technique Math. de la Physique (Orsay).	GAUDEMAR	T Chimie Propéd.
OLIVIER	T Antropologie.	PÉREZ Y JORBA ..	T Phys. Exp. des Hautes énergies (Orsay).
NOZERAN	T Botanique II (Orsay).	DAVID	T Chimie (Agrég. Orsay).
BLANC-LAPIERRE ..	T Phys. ENS (Orsay).	BROUSSE	T Mécanique théorique.
		ROSCH	T Astronomie.

Le Secrétaire Général..... R. POULLAIN.

